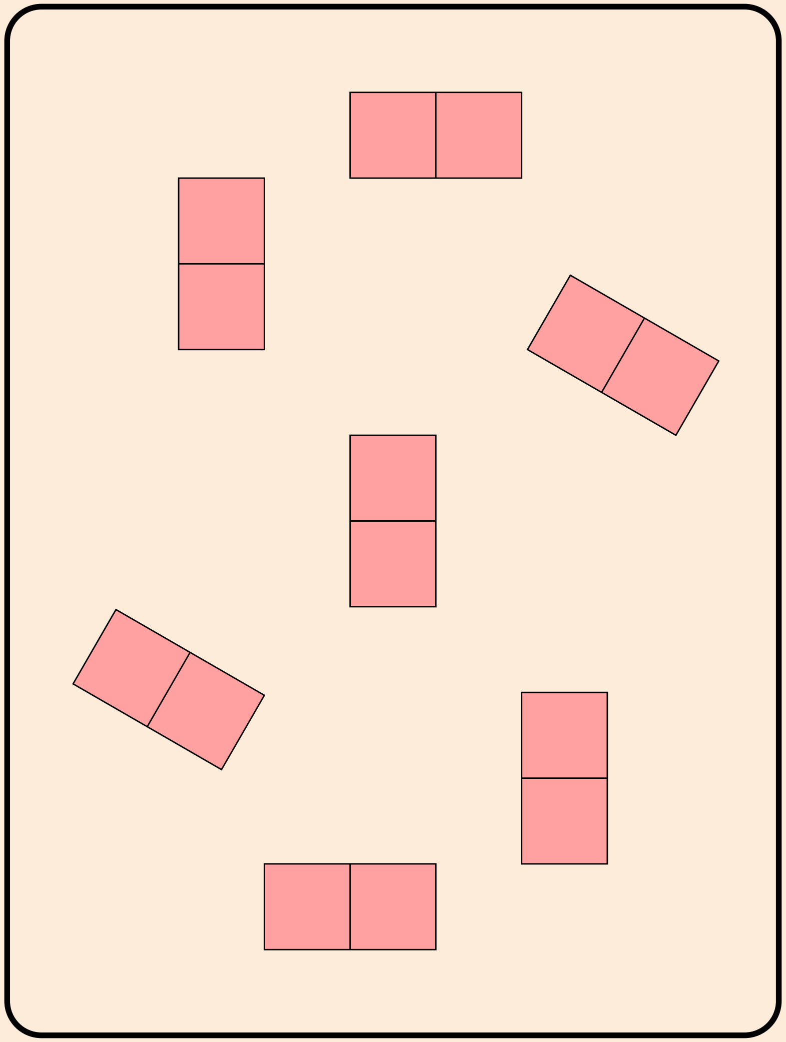
Estratègies basades en simetries

Taulell quadrat o rectangular (per exemple un taulell d'escacs), i les fiches del dòmino. Cada jugador posa una ficha on vol, juguen alternativament, i qui no té espai per posar la fitxa perd.

Ocupant el centre i jugant després per simetria, guanya el primer jugador.

Si la taula tingués un forat (o obstacle) al centre, guanya el segon jugador fent la jugada simètric del primer.

Aquí simetria vol dir rotació de 180° respecte el centre.



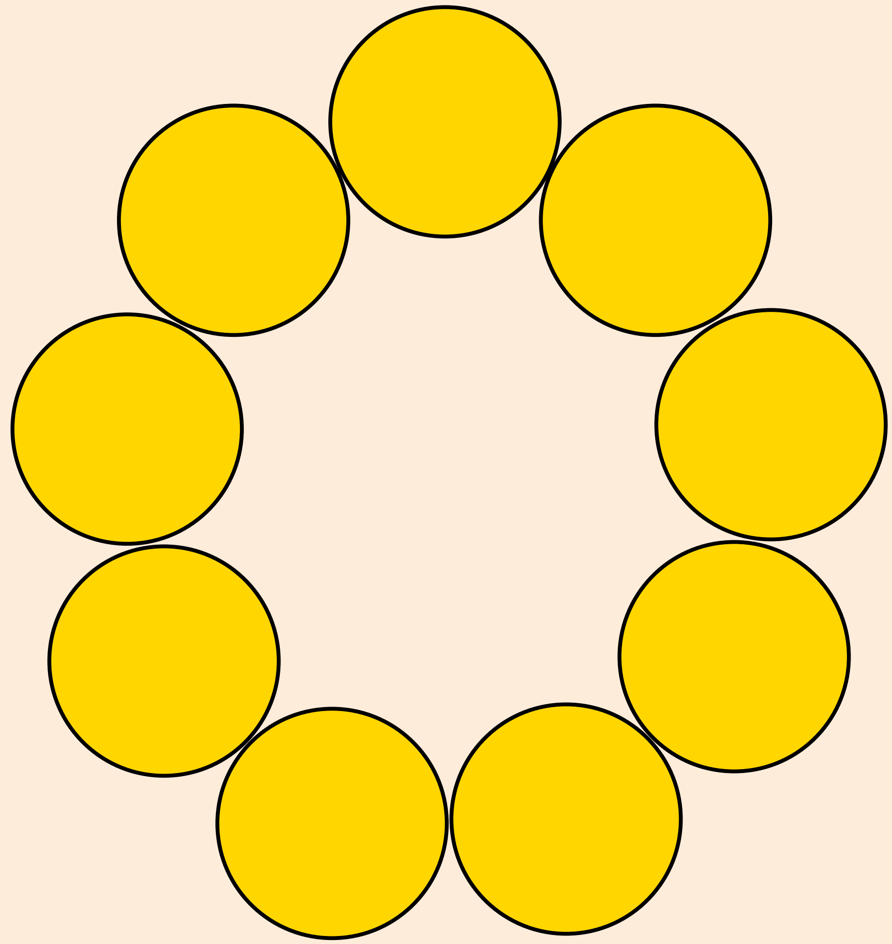
Cercle de monedes

Es disposen en cercle un cert nombre de monedes en contacte (entre 8 y 14 és un nombre raonable). Cada jugador pot eliminar una moneda o bé dues que es toquin; juguen alternativament, i qui no pot jugar (no queden monedes) perd.

Amb una estratègia basada en simetries, guanya sempre el segon jugador.

Quina és l'estratègia guanyadora?.

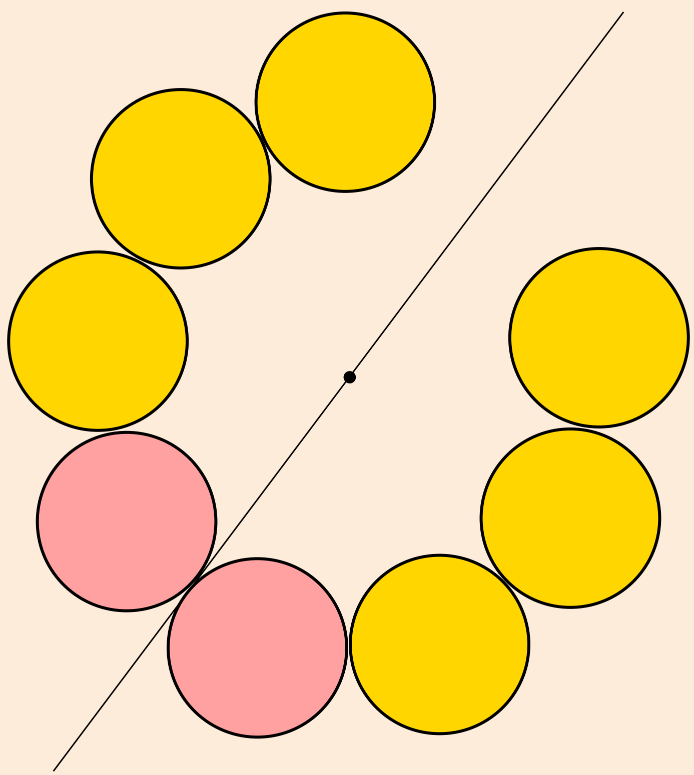
Quina és la simetria que cal fer servir?

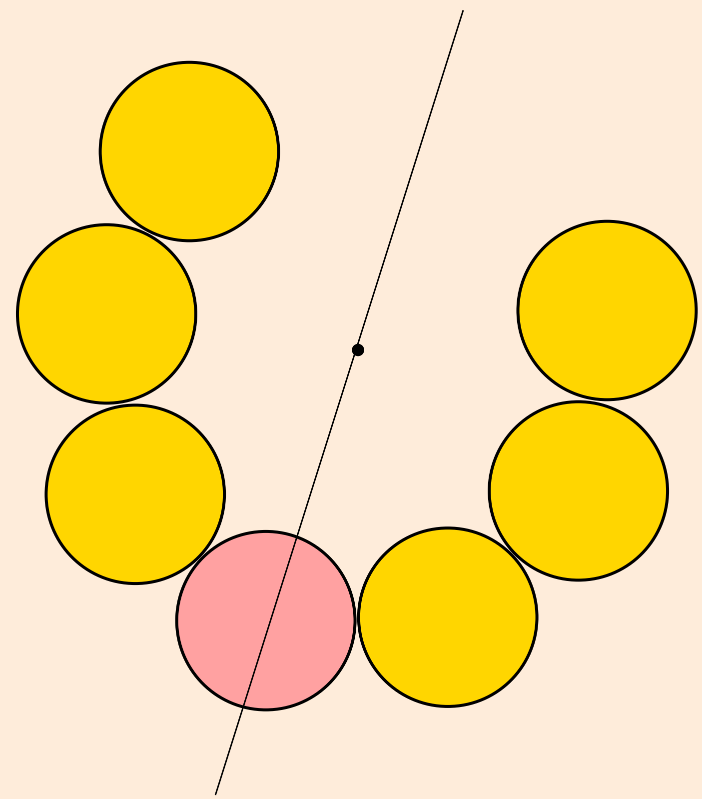


Cercle de monedes - solució

Estratègia: feta la jugada del primer jugador, dibuixem l'eix de simetria de la figura que queda, i eliminem la o les monedes en contacte amb l'eix. Després, fem la jugada simètrica fins que s'acaben les monedes.

Simetria: reflexió respecte d'un eix (simetria especular).





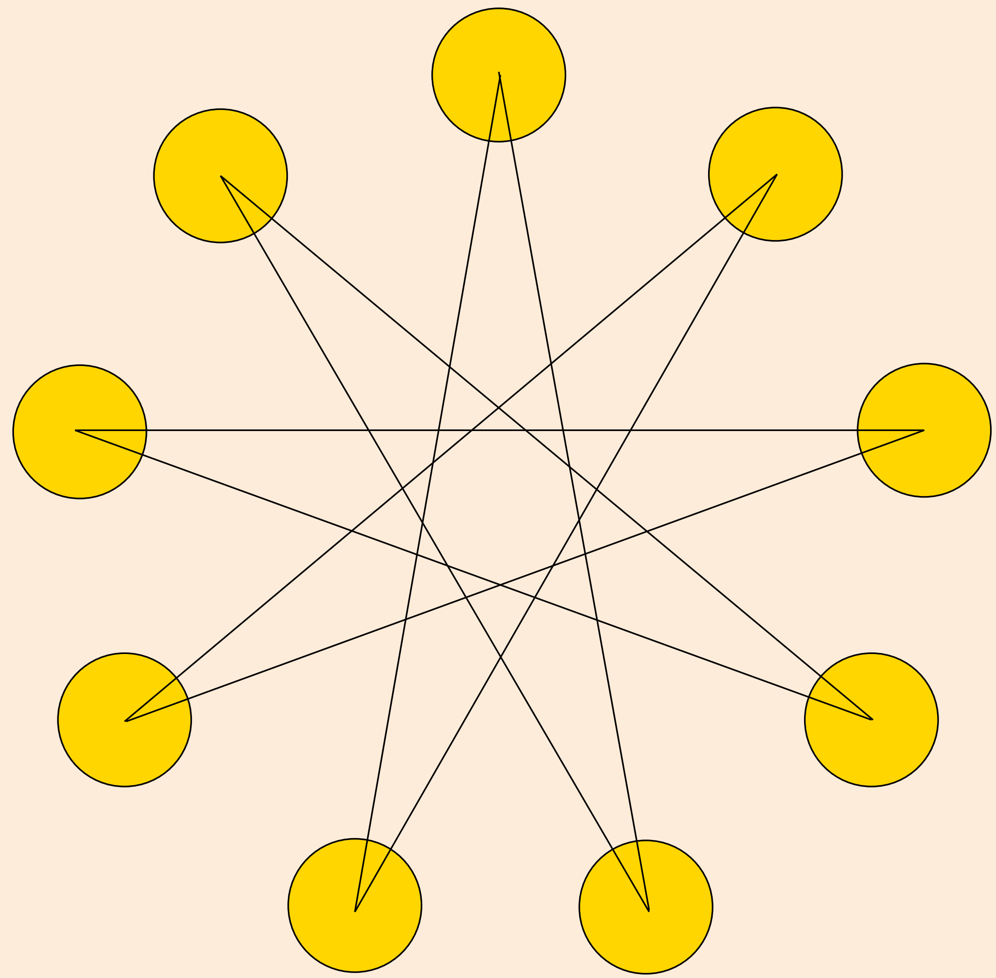
Estel de monedes

Es dibuixa un estel de per exemple nou puntes, i es col·loquen monedes als vèrtex. Cada jugador pot eliminar una moneda o bé dues unides per un segment; juguen alternativament, i qui no pot jugar (no queden monedes) perd.

Amb una estratègia basada en simetries, guanya sempre el segon jugador.

Quina és l'estratègia guanyadora?.

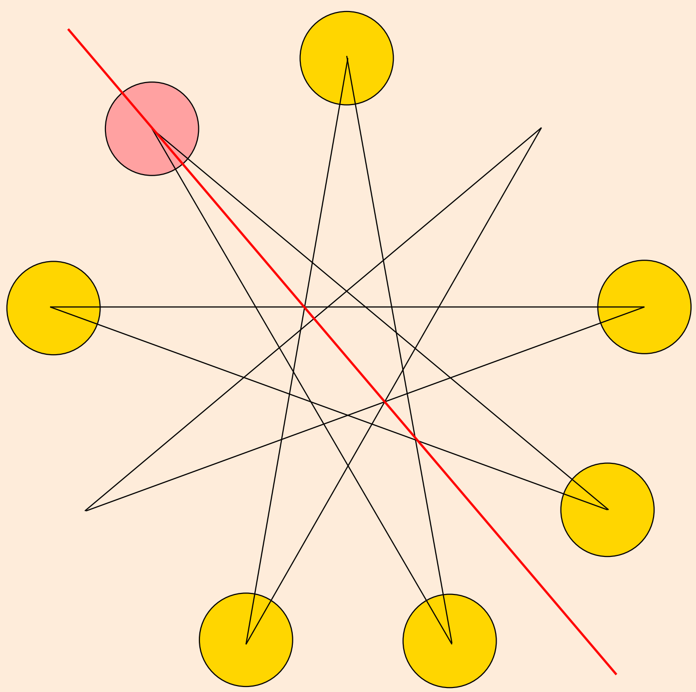
Quina és la simetria que cal fer servir?

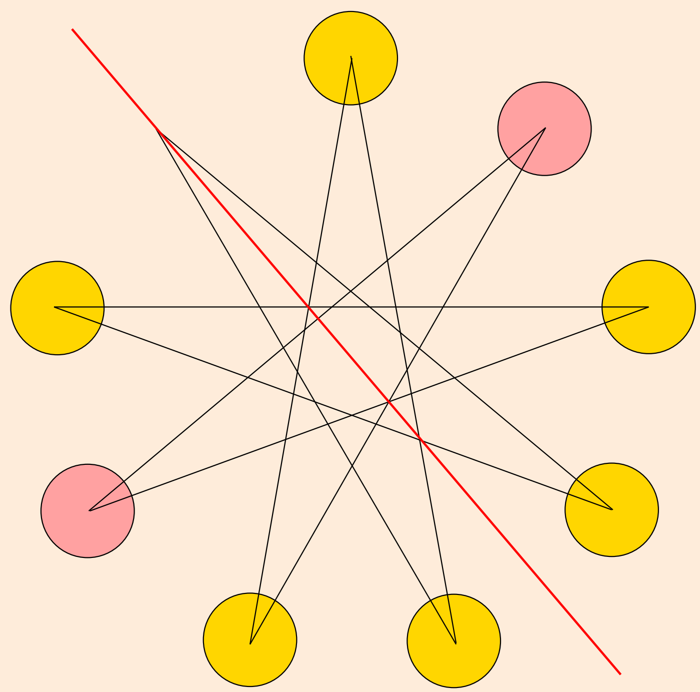


Estel de monedes - solució

Estratègia: feta la jugada del primer jugador, dibuixem l'eix de simetria de la figura que queda, i eliminem la moneda en contacte amb l'eix, o bé la parella que te el segment ortogonal a l'eix. Després, fem la jugada simètrica fins que s'acaben les monedes.

Simetria: reflexió respecte d'un eix (simetria especular).



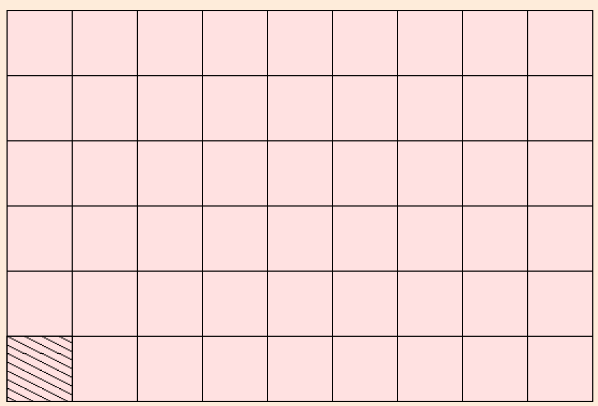
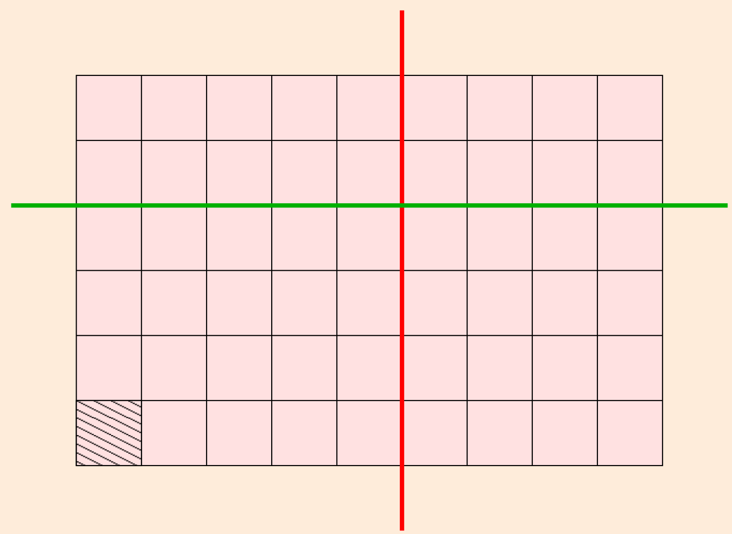


Anàlisi regresiu

Consisteix en analitzar el joc a partir de la posició final i anar enrrera, analitzant les posicions anteriors, fins arribar a la posició de partida.

Exemple: **la pastilla de xocolata fastigosa**. Tenim una lliure de chocolata formada per (m, n) pastilles de forma rectangular. La pastilla de la cantonada és diferent i té un gust desagradable.

Els jugadors, alternativament, tallen el rectangle de xocolata per una línia vertical o horitzontal (exemple, les línies de color de la figura), i es mengen una de les parts. Qui es menja la pastilla fastigosa perd. Com ho hem de fer per guanyar?

$(9, 6)$  

Anàlisi regresiu – xocolata

Basta discutir els casos $m \geq n$; sino, li donem la volta al xocolate.

$(1,1)$ perd el primer jugador (en menja la pastilla fastigosa).

$(1,n)$, $n > 1$ guanya el primer jugador passant a $(1,1)$.

$(2,2)$ perd el primer ja que va per força a $(1,2)$.

$(2,n)$, $n > 2$ guanya el primer passant a $(2,2)$.

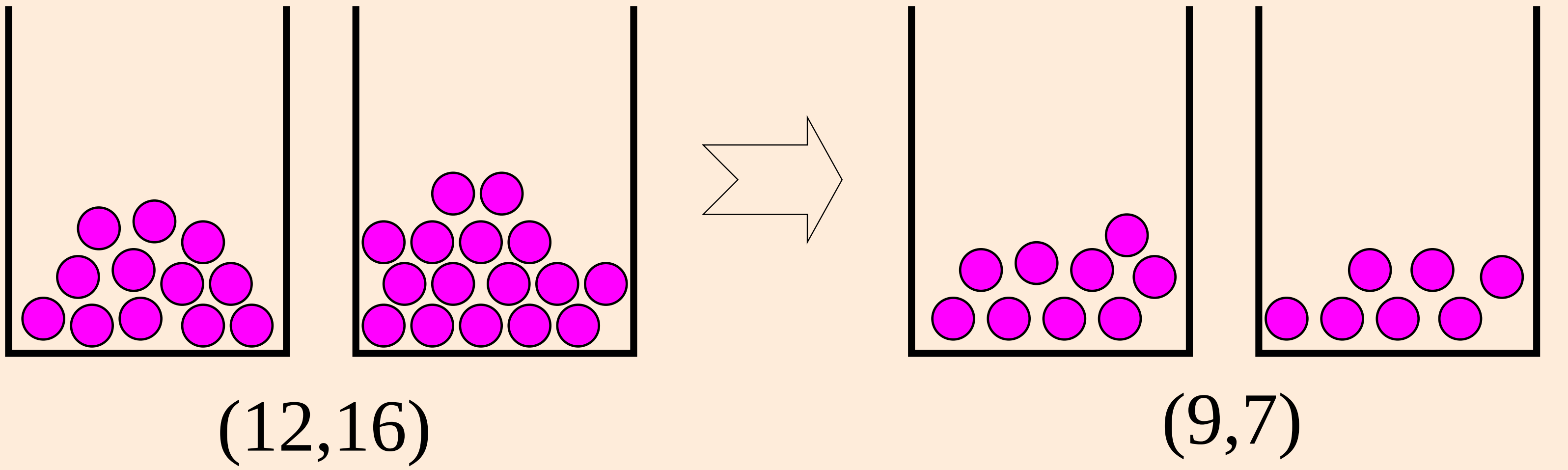
$(3,3)$ perd el primer ja que va per força a $(1,3)$ o $(2,3)$.

...

En conclusió, a (n,n) guanya el segon jugador, i a la resta guanya el primer (es demostra per inducció sense problemes). Es guanya fent el rectangle quadrat, i es perd si el rectangle és quadrat i ens toca jugar.

Divideix i venceràs

Partim de dues caixes que contenem (m, n) boles respectivament. Els jugadors A i B, alternativament, buiden una de les caixes i reparteixen el contingut de l'altre entre les dues; cap caixa es pot quedar buida. Perd el jugador que no pot fer una jugada lícita.



El joc podria continuar així:

$$(12, 16) \xrightarrow{A} (9, 7) \xrightarrow{B} (3, 4) \xrightarrow{A} (2, 1) \xrightarrow{B} (1, 1)$$

i el jugador A perd ja que no pot fer jugada lícita.

Anàlisi regresiu – Divideix i venceràs

Basta discutir els casos $m \geq n$ ja que les caixes son intercanviables.

$(1, 1)$ perd el primer jugador (no hi ha jugades lícites).

$(2, n)$ guanya el primer jugador passant a $(1, 1)$.

$(3, 1)$ perd el primer ja que va per força a $(2, 1)$.

$(3, 3)$ perd el primer ja que va per força a $(2, 1)$.

$(4, n)$ guanya el primer passant a $(3, 1)$.

$(5, 1)$ perd el primer ja que va per força a $(2, 3)$ o $(4, 1)$.

$(5, 3)$ perd el primer ja que va per força a $(2, 1)$, $(2, 3)$ o $(4, 1)$.

$(5, 5)$ perd el primer ja que va per força a $(2, 3)$ o $(4, 1)$.

$(6, n)$ guanya el primer passant a $(5, 1)$ o $(3, 3)$.

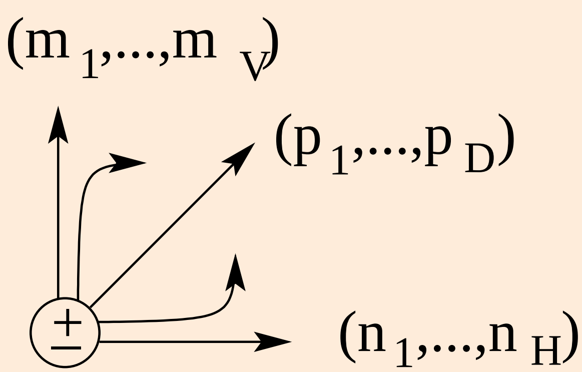
...

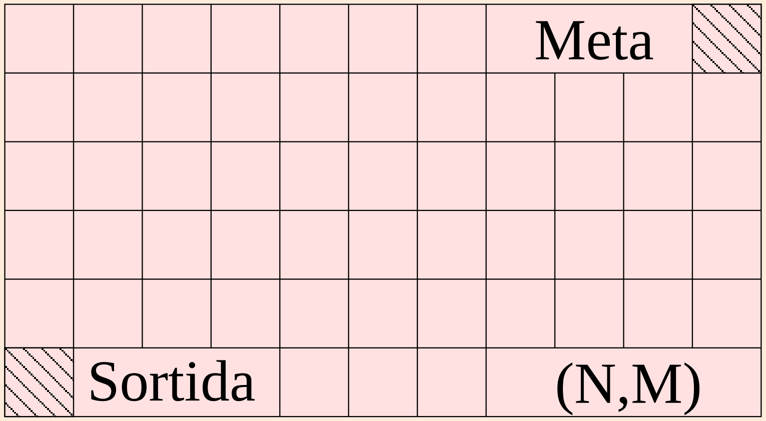
En conclusió, a (m, n) guanya el segon jugador si els dos son imparells, i el primer si algun és parell. Es guanya repartint el nombre parell en dos imparells.

Persecució cartesiana - 1

Es juga en un taulell rectangular de (N, M) quadres en horitzontal i vertical. Es parteix de l'extrem inferior esquerra, i es tracta, jugant alternativament i avançant d'acord amb unes regles, d'arribar a la meta, la casella superior dreta. Qui arriba guanya; si un jugador surt del taulell perd.

Els possibles moviments seràn avançar verticalment m_1, m_2 ... o m_V caselles, horitzontalment n_1, n_2 ... n_H caselles o diagonalment p_1, p_2 ... p_D caselles. S'hi poden incloure moviments de cavall d'escacs. El conjunt de moviments es representa amb un diagrama de fletxes.





També es pot jugar la versió misèria del joc, en la que el que arriba a la meta (o es surt del taulell) perd. Ho indicarem amb un $-$ al cercle origen de les fletxes, i amb $+$ la versió normal del joc.

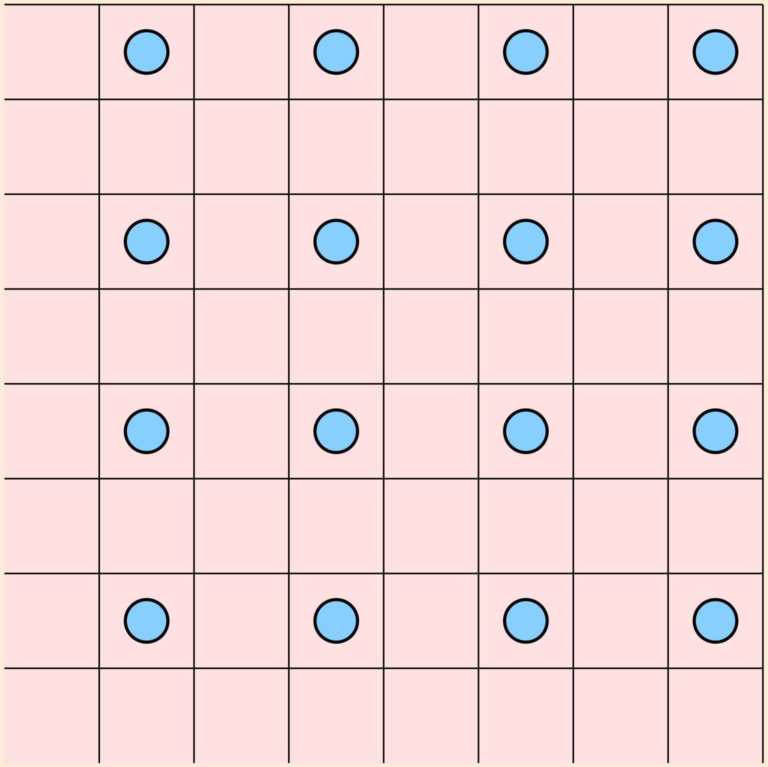
Persecució cartesiana - 2

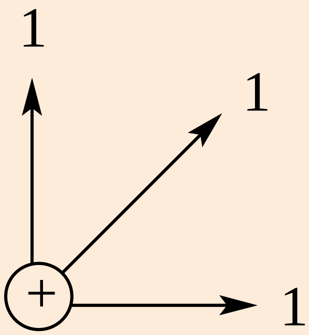
Considerem el cas de avançar un quadre en vertical, diagonal o horitzontal. Partint de la meta, posarem un cercle blau a les casilles en les que el primer que juga perd (el segon jugador guanya).

Si des d'una casella es pot anar **al menys** a una casella amb cercle blau, el primer jugador guanya.

Si des d'una casella **cap** moviment porta a una casella amb cercle blau, el segon jugador guanya, i hi posarem un cercle blau.

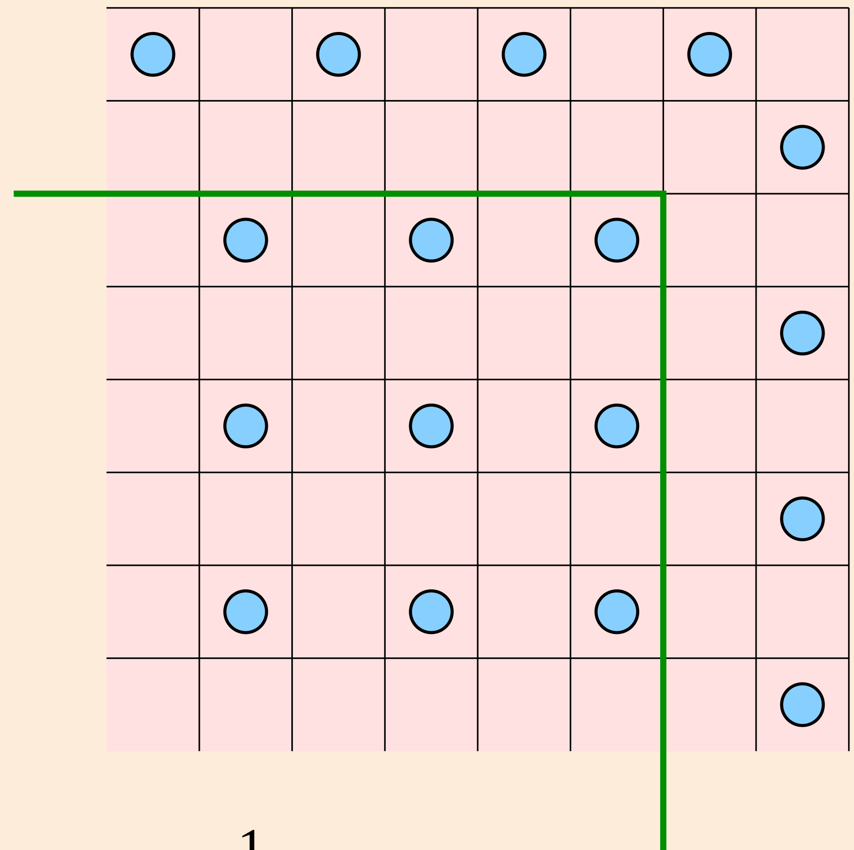
Des d'una casella amb un cercle blau, podem assegurar que les tres caselles desde les que es pot anar a ella, no porten cercle blau (el primer jugador guanya).



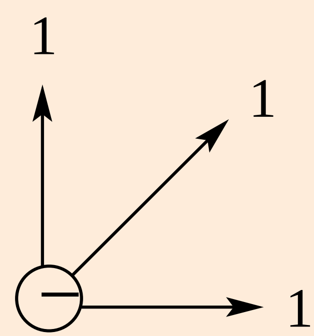


Persecució cartesiana - 3

Examinem la versiò misèria del joc anterior. Ara la meta no te cercle blau, i les caselles que necessàriament hi porten tenen cercle blau. A partir d'aquí, es pot trobar l'esquema de caselles amb cercle blau.



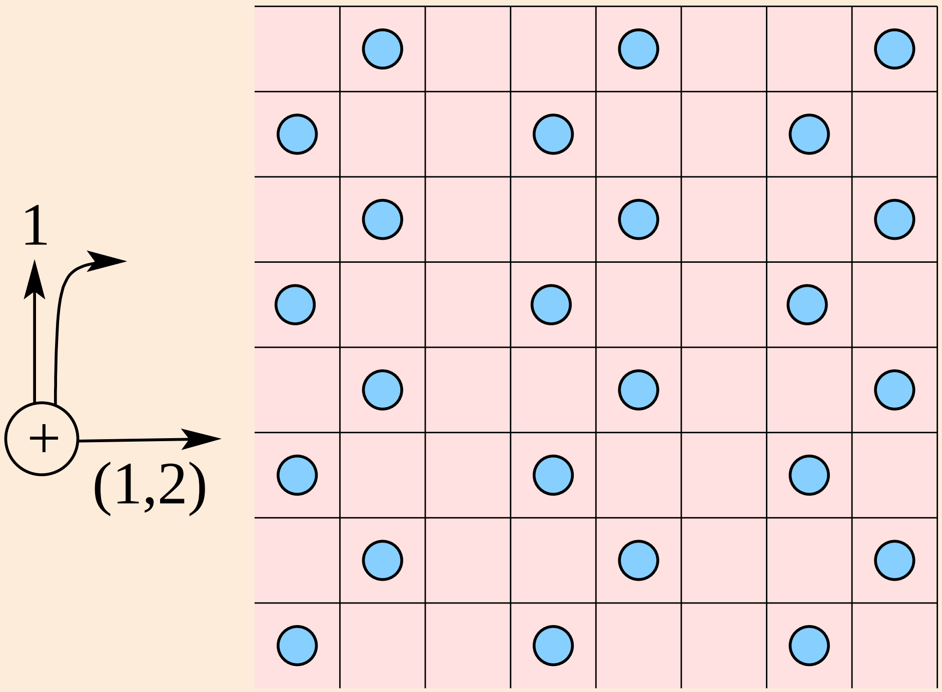
L'esquema és el mateix que el de la versió positiva del joc (part enmarcada de color verd), excepte que apareix una vora a la part superior i esquerra, d'amplada dos, on hem de canviar d'estratègia. Aquest és un comportament típic de les versions misèries.

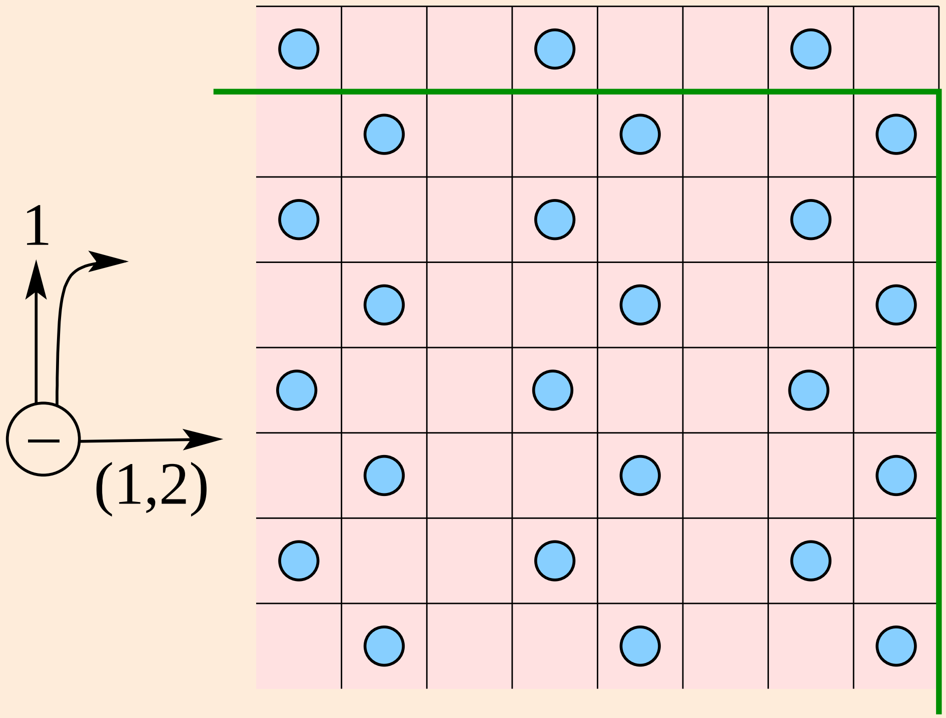


Tant a la versió $+$ com $-$ guanya el primer jugador sii M o N son parells. L'excepció és la vora: en taulells $(1, N)$ i $(N, 1)$, N parell, guanya el primer jugador a $+$ i el segon a $-$.

Persecució cartesiana - 4

Examinem finalment un cas complicat.





Versió $+$: guanya el primer jugador si $M = \dot{3}$ o bé, si $M \neq \dot{3}$ i $M + N$ és imparell.

Versió $-$: guanya el primer jugador si $M = \dot{3}$ o bé, si $M \neq \dot{3}$ i $M + N$ és parell.