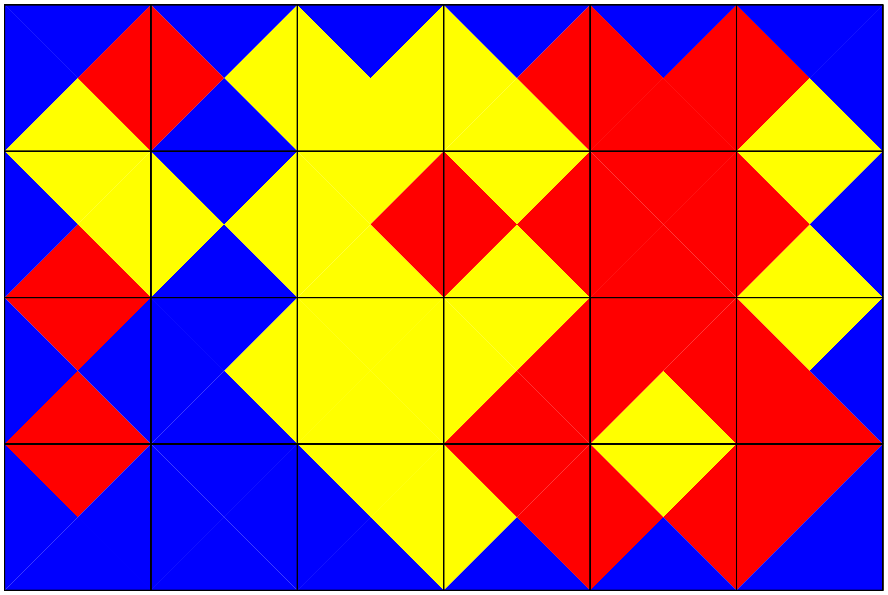
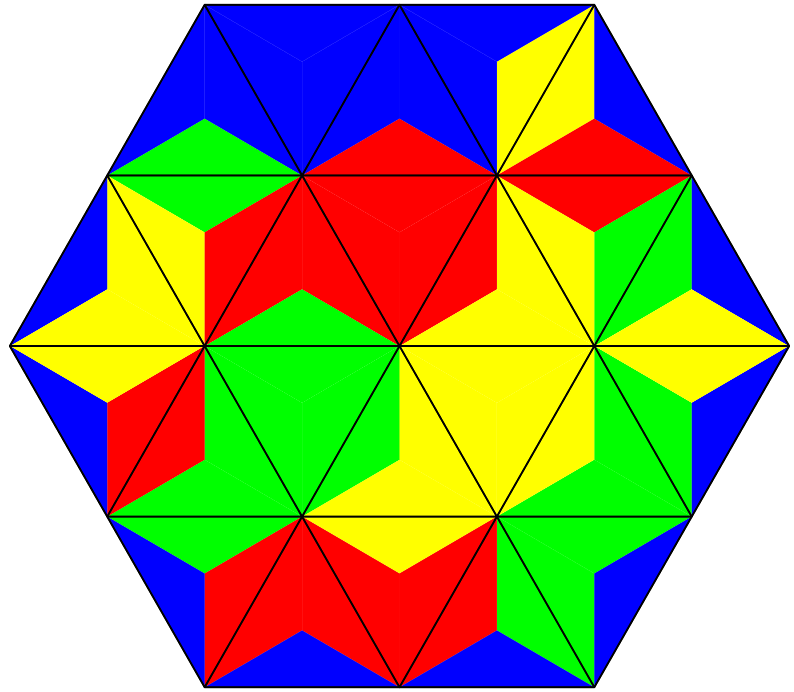
Polígons regulars colorejats



Els 24 quadrats de tres colors.



Els 24 triangles de quatre colors.

Regles de McMahon.

- Arestes en contacte del mateix color.
- Perímetre d'un sol color.

Com contar. Exemple: els triangles amb n colors.

Enumeració exhaustiva.

Un color	3	n
Dos colors	2+1	$n(n-1)$
Tres colors	1+1+1	$n(n-1)(n-2)/3/2$

Total, $N_3 = \dfrac{1}{3}n(n^2+2)$, $\qquad N_3^* = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_3	1	4	11	24	45	76	119	176	249	340	451	584
N_3^*	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364

n	13	14	15	16	17	18	19	20
N_3	741	924	1135	1376	1649	1956	2299	2680
N_3^*	455	560	680	816	969	1140	1330	1540

Com contar. Exemple: els quadrats amb n colors.

Un color	4	n
Dos colors	3+1	$n(n-1)$
	2+2 contigus	$n(n-1)/2$
	2+2 alternats	$n(n-1)/2$
Tres colors	2+1+1 contigus	$n(n-1)(n-2)/2$
	2+1+1 alternats	$n(n-1)(n-2)/2$
Quatre colors	1+1+1+1	$n(n-1)(n-2)(n-3)/4/2$

Total, $N_4 = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$, $\qquad N_4^* = \dfrac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_4	1	6	24	70	165	336	616	1044	1665	2530	3696	5226
N_4^*	1	6	21	55	120	231	406	666	1035	1540	2211	3081

n	13	14	15	16	17	18	19	20
N_4	7189	9660	12720	16456	20961	26334	32680	40110
N_4^*	4186	5565	7260	9316	11781	14706	18145	22155

Simetries dels polígons regulars. Els grups C_m i D_m.

Un polígon regular d'm costats és invariant per una rotació de $2\pi/m$, R, i els seus múltiples. Com que $R^m = I$, aquestes rotacions formen un grup d'm elements, $C_m = \{I, R, R^2, \ldots, R^{m-1}\}$, el grup cíclic d'ordre m.

Tenim a més m simetries de reflexió, respecte de les rectes que passen pel centre del polígon i pels vèrtex i/o centres de les arestes. Aquets $2m$ elements constitueixen el grup $D_m = \{I, R, R^2, \ldots, R^{m-1}, K_1, K_2, \ldots, K_m\}$.

Acció d'un grup G sobre un conjunt X. Donat $g \in G$ i $x \in X$, $gx \in X$ satisfà: $Ix = x$ i $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ per tots $x \in X$, $g_i \in G$. Definicions:

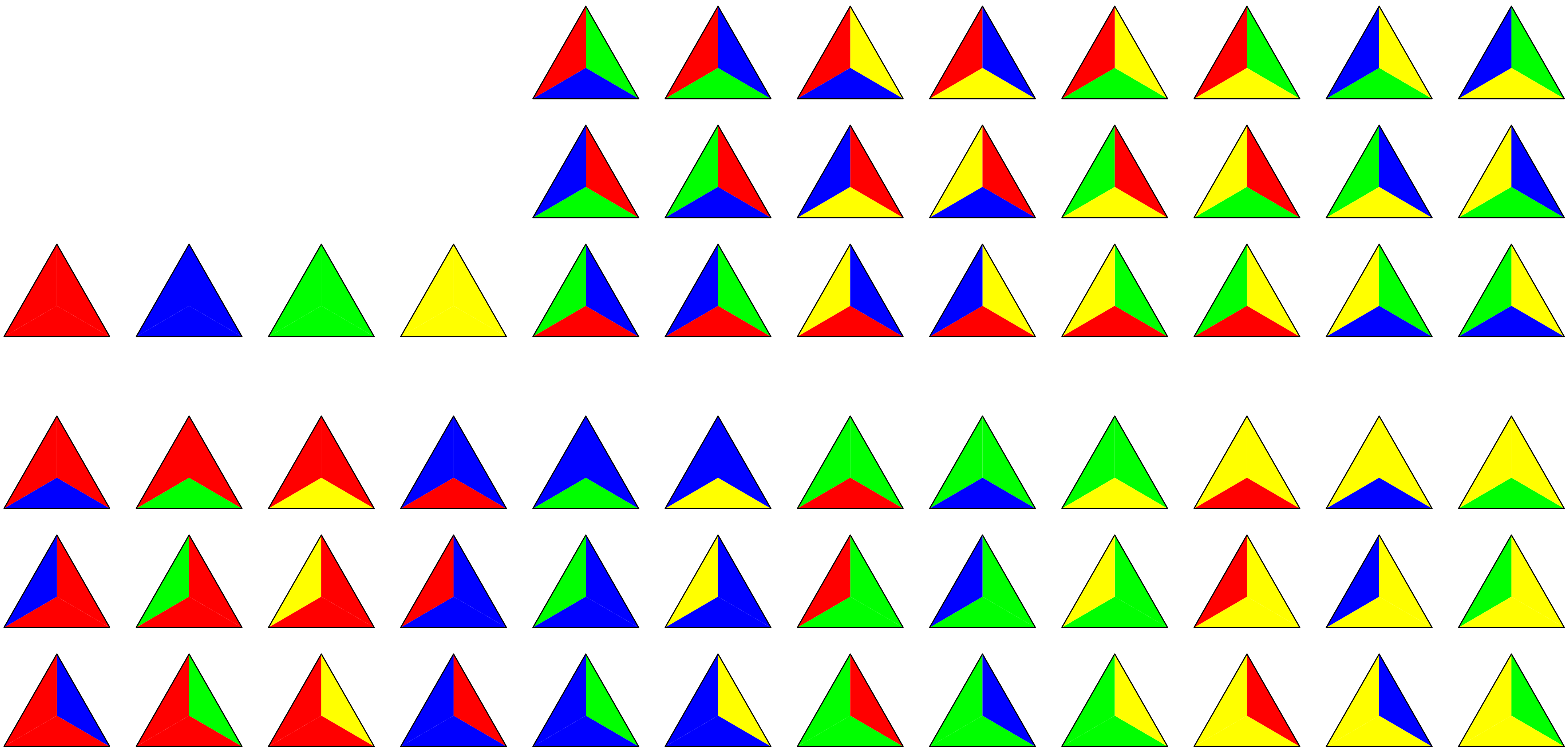
- Elements invariants per g: $X_g = \{x \in X | gx = x\}$
- Simetries que deixen x invariant: $G_x = \{g \in G | gx = x\}$
- Òrbita de x: $O_x = \{gx \in X | g \in G\}$

Les òrbites particionen X; identificant els elements de cada òrbita, ens interesa el nombre d'òrbites N (peces diferents).

Lema de Burnside: $$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

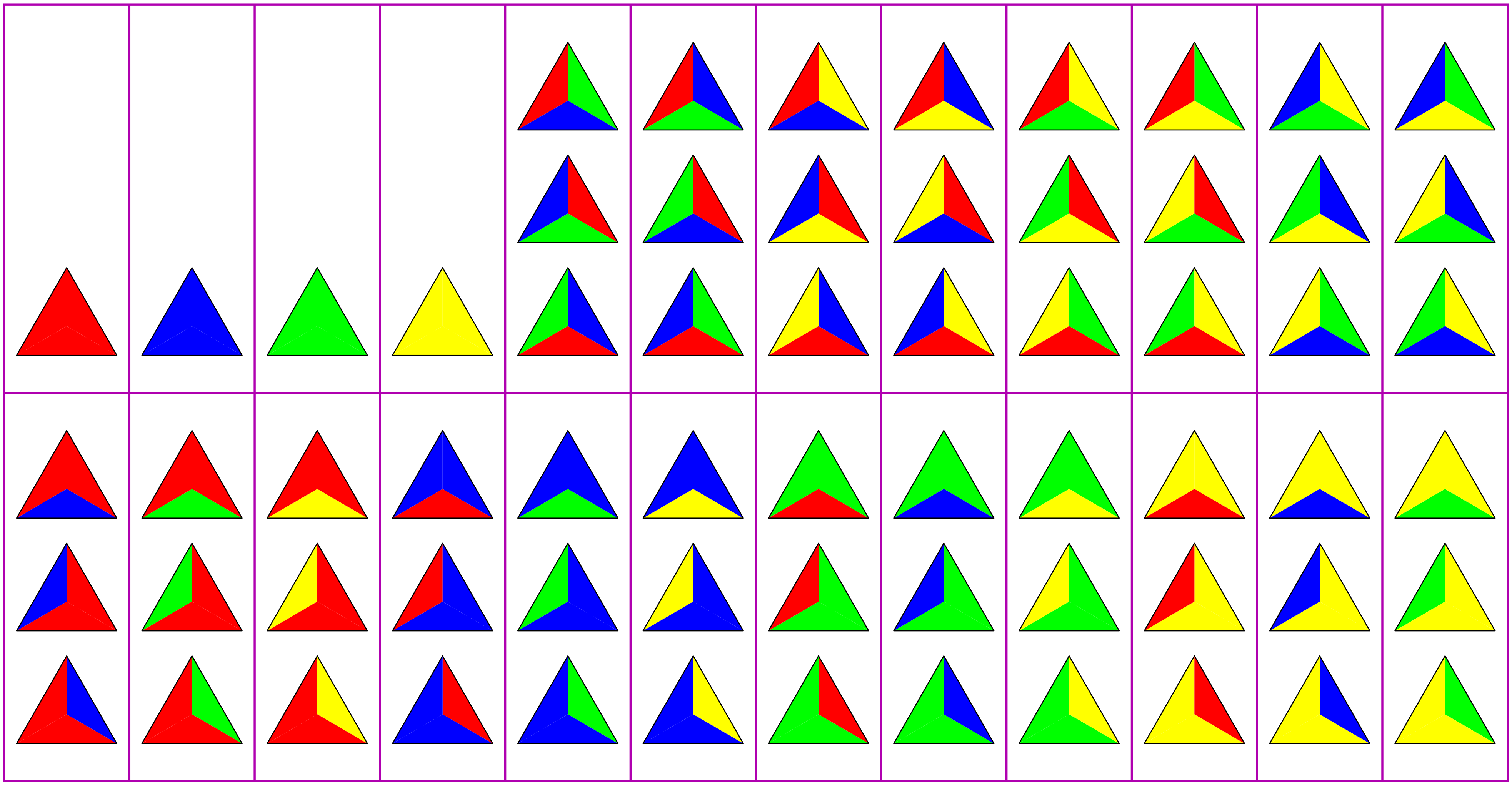
Triangles de 4 colors – I.

Un triangle es pot colorejar de $4^3 = 64$ maneres, que formen el conjunt X: $|X| = 64$.



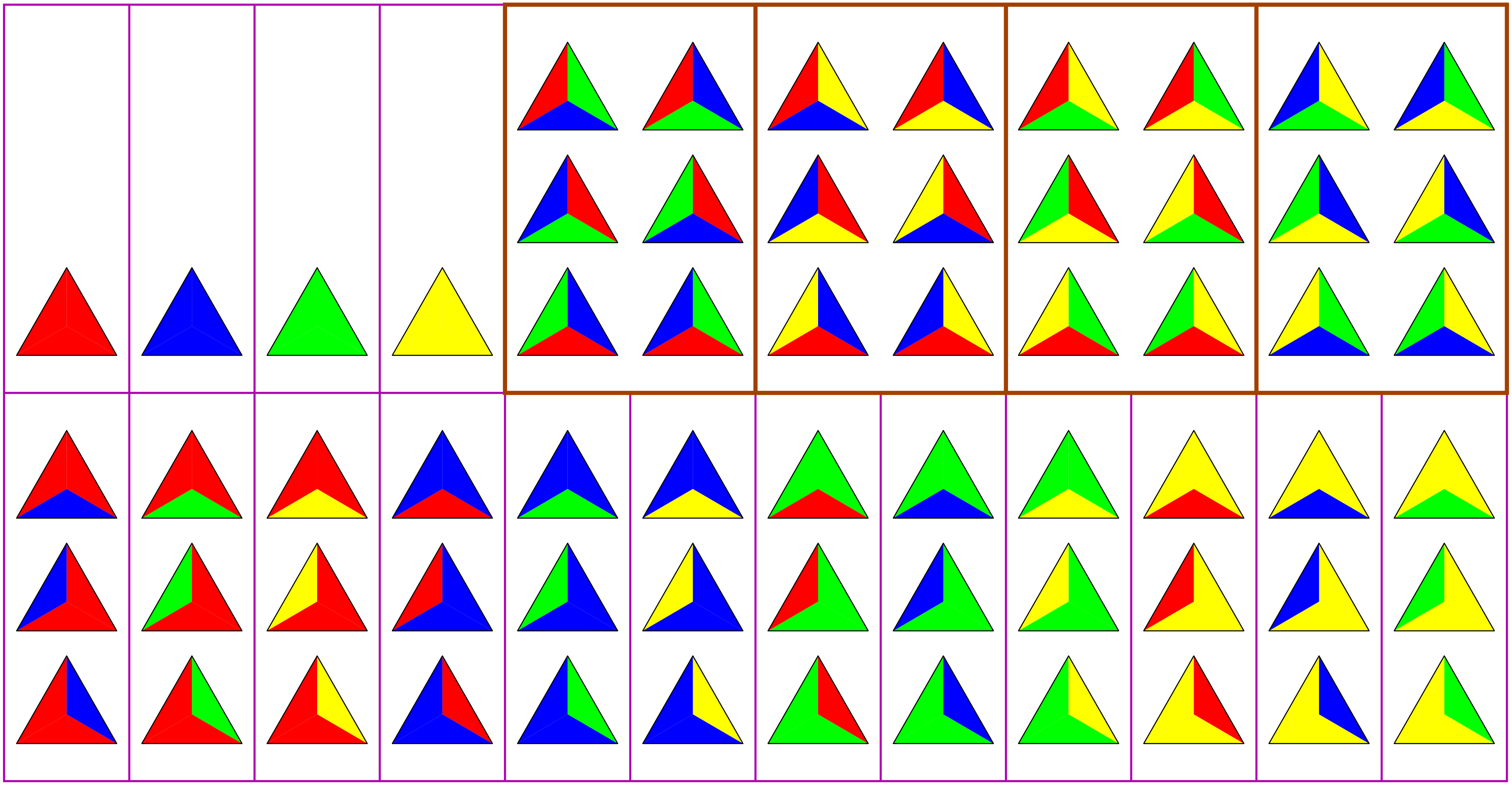
Triangles de 4 colors – II.

Un triangle es pot colorejar de $4^3 = 64$ maneres, que agrupades per òrbites de C_3 donen $N = 24$ peces.



Triangles de 4 colors – III.

Un triangle es pot colorejar de $4^3 = 64$ maneres, que agrupades per òrbites de D_3 donen $N = 20$ peces.



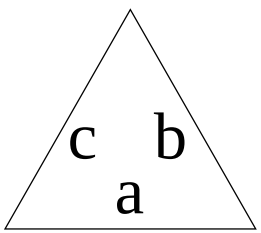
Càlcul de N amb el Lema de Burnside.

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

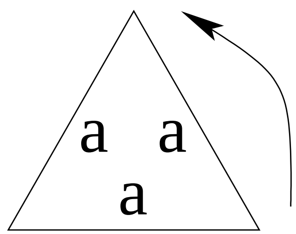
$C_3 = \{I, R, R^2\}$, $|G| = |C_3| = 3$

$|X_I| = n^3$, $\quad |X_R| = |X_{R^2}| = n$, $\quad N_3 = \frac{1}{3}(n^3 + 2n) = \frac{1}{3}n(n^2+2)$

I:



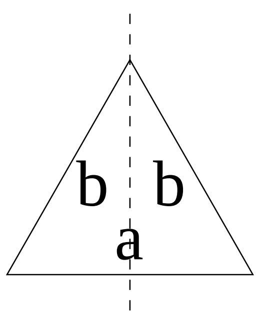
R, R^2:



$D_3 = \{I, R, R^2, K_1, K_2, K_3\}$, $|G| = |D_3| = 6$

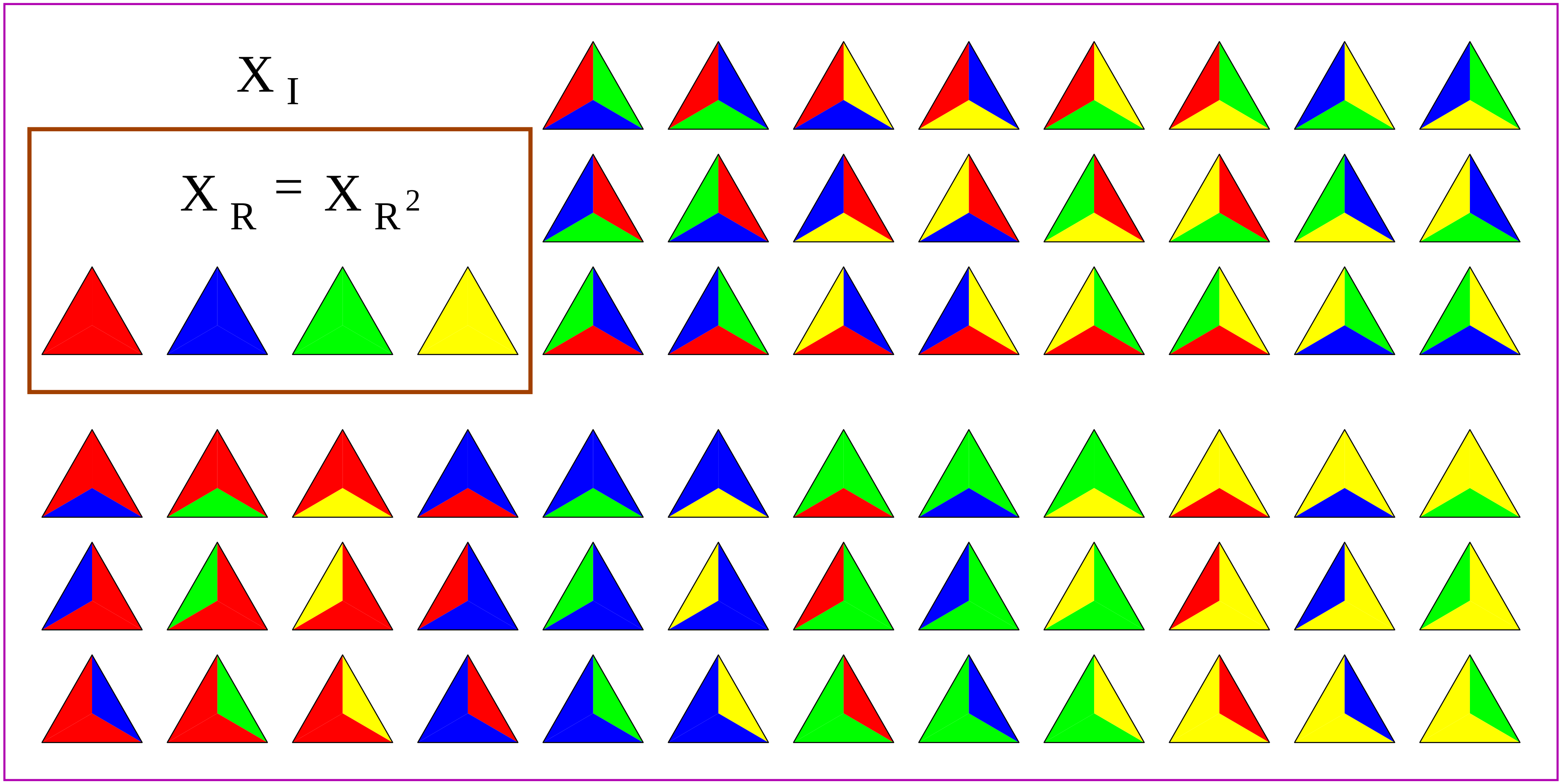
$|X_{K_1}| = |X_{K_2}| = |X_{K_3}| = n^2$, $\quad N_3^* = \frac{1}{2}N_3 + \frac{1}{6}3n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

K_1, K_2, K_3:



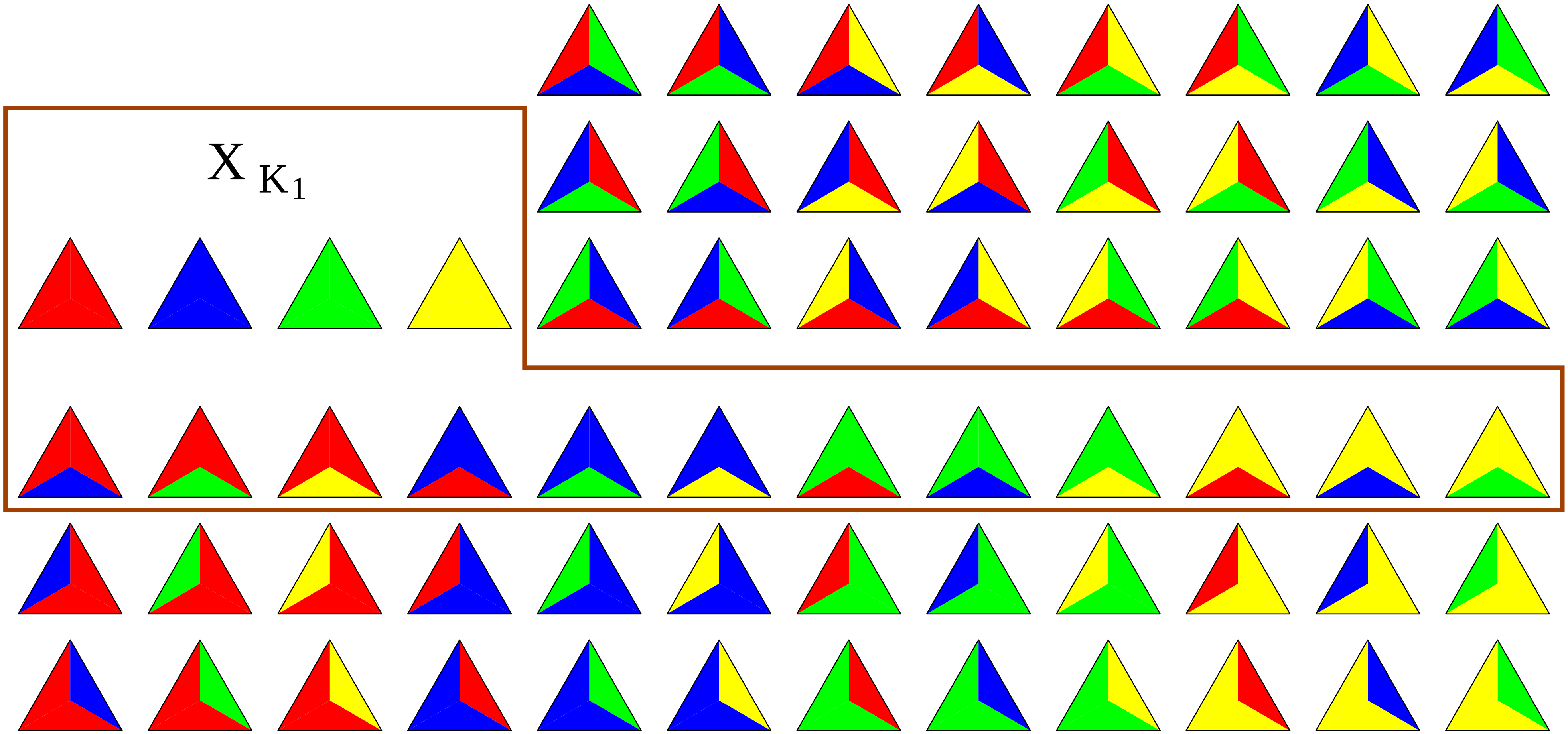
Triangles de 4 colors – IV.

Elements invariants per R^j, $j = 0, 1, 2$



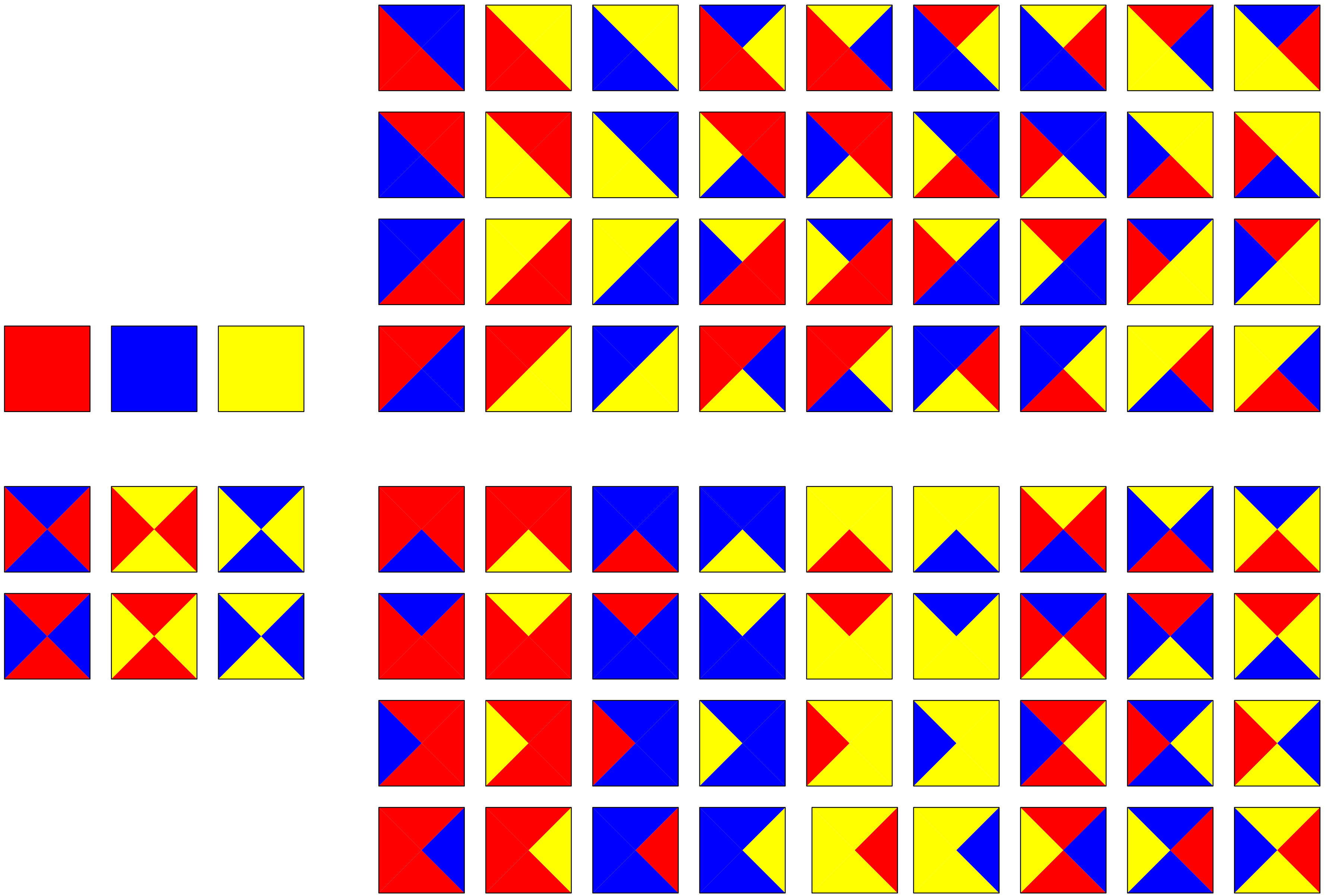
Triangles de 4 colors – V.

Elements invariants per K_j, $j = 1, 2, 3$



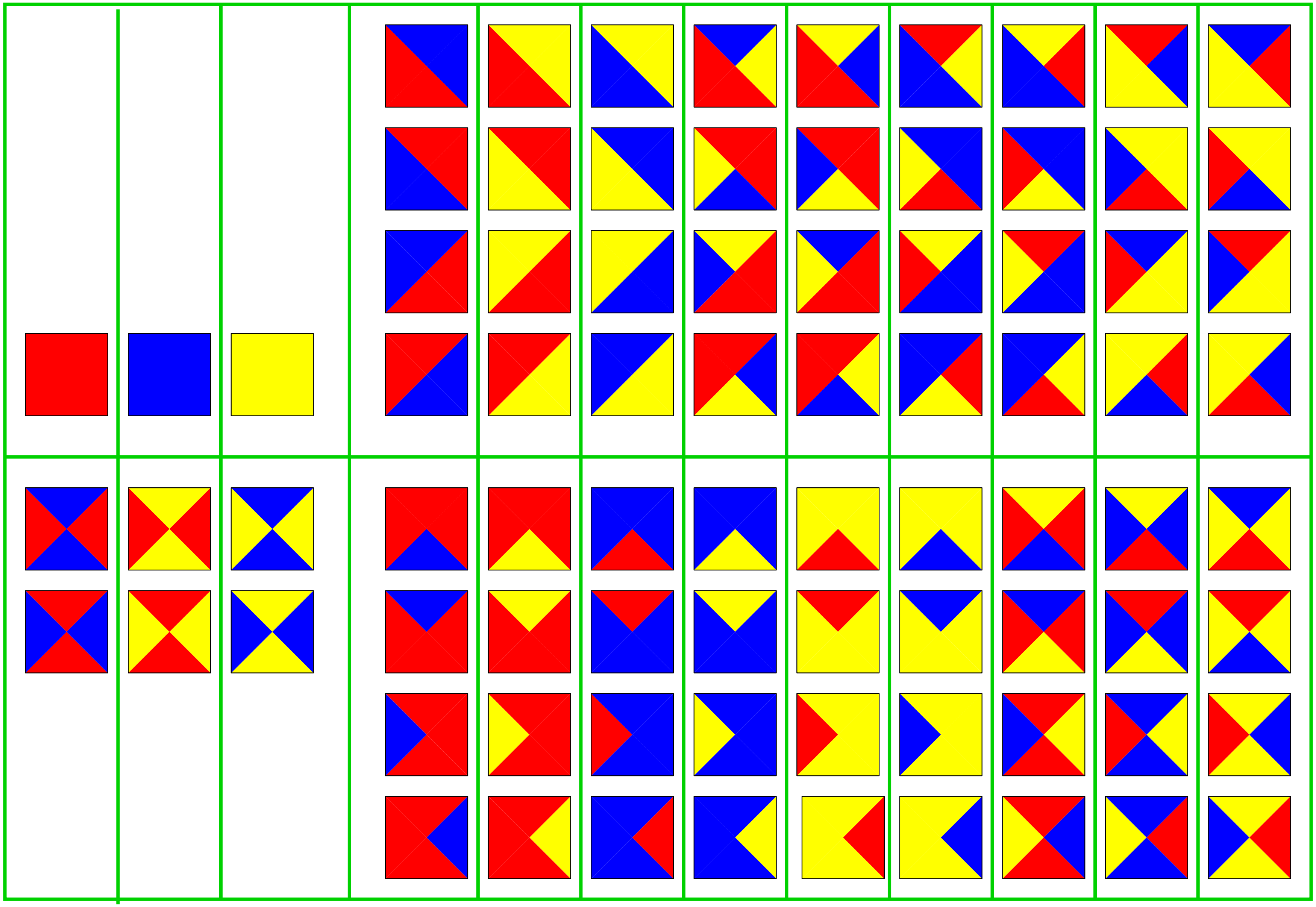
Quadrats de 3 colors – I.

Un quadrat es pot colorejar de $3^4 = 81$ maneres, que formen el conjunt X: $|X| = 81$.



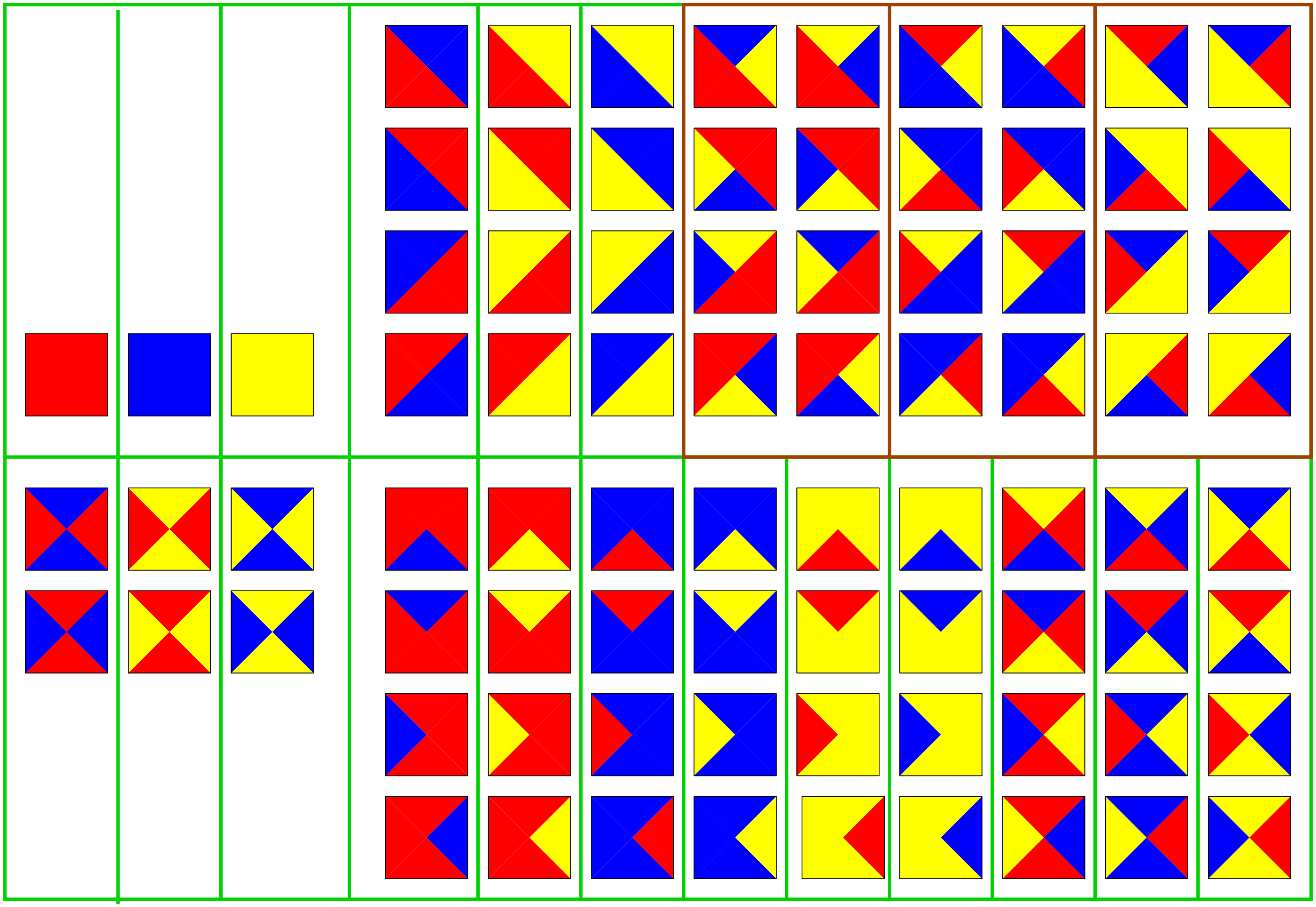
Quadrats de 3 colors – II.

Un quadrat es pot colorejar de $3^4 = 81$ maneres, que agrupades per òrbites de C_4 donen $N = 24$ peces.



Quadrats de 3 colors – III.

Un quadrat es pot colorejar de $3^4 = 81$ maneres, que agrupades per òrbites de D_4 donen $N = 21$ peces.

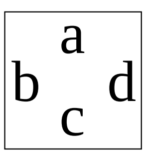


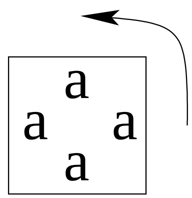
Càlcul de N amb el Lema de Burnside.

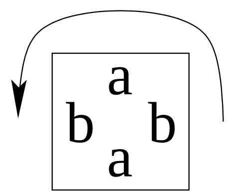
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |X_g|$$

$C_4 = \{I, R, R^2, R^3\}$, $|G| = |C_4| = 4$

$|X_I| = n^4$, $|X_{R^2}| = n^2$, $|X_R| = |X_{R^3}| = n$, $\quad N_4 = \frac{1}{4}(n^4 + n^2 + 2n)$

I: 

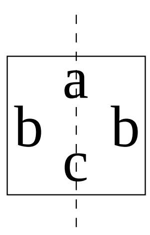
R, R^3: 

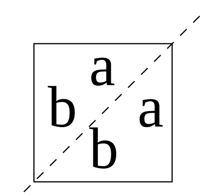
R^2: 

$$= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 - n + 2)$$

$D_4 = \{I, R, R^2, R^3, K_1, K_2, K_4, K_4\}$, $|G| = |D_4| = 8$

$|X_{K_1}| = |X_{K_3}| = n^3$, $|X_{K_2}| = |X_{K_4}| = n^2$, $\quad N_4^* = \frac{1}{2} N_4 + \frac{2}{8}(n^3 + n^2)$

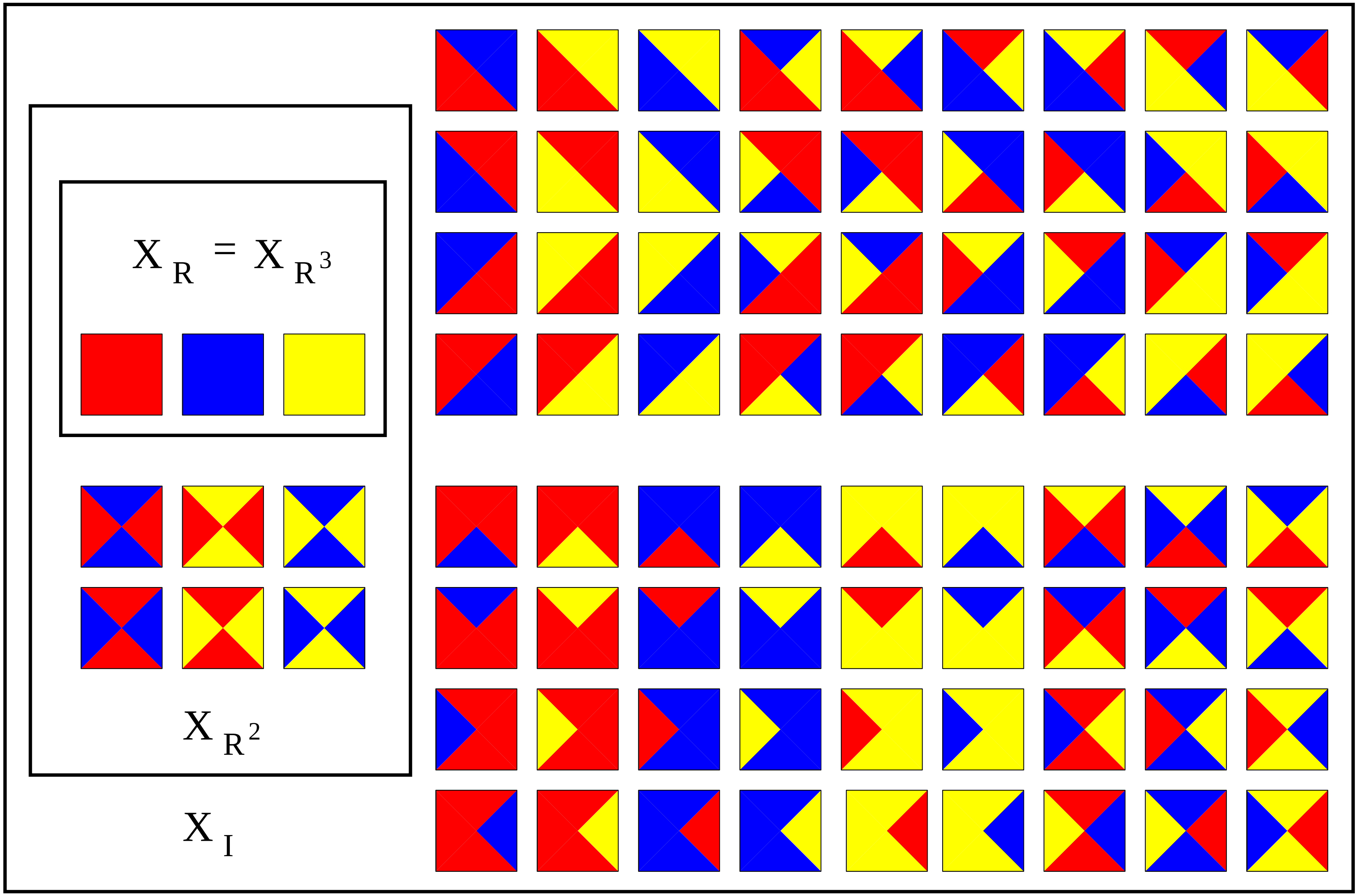
K_1, K_3: 

K_2, K_4: 

$$= \frac{1}{8} n(n+1)(n^2 + n + 2)$$

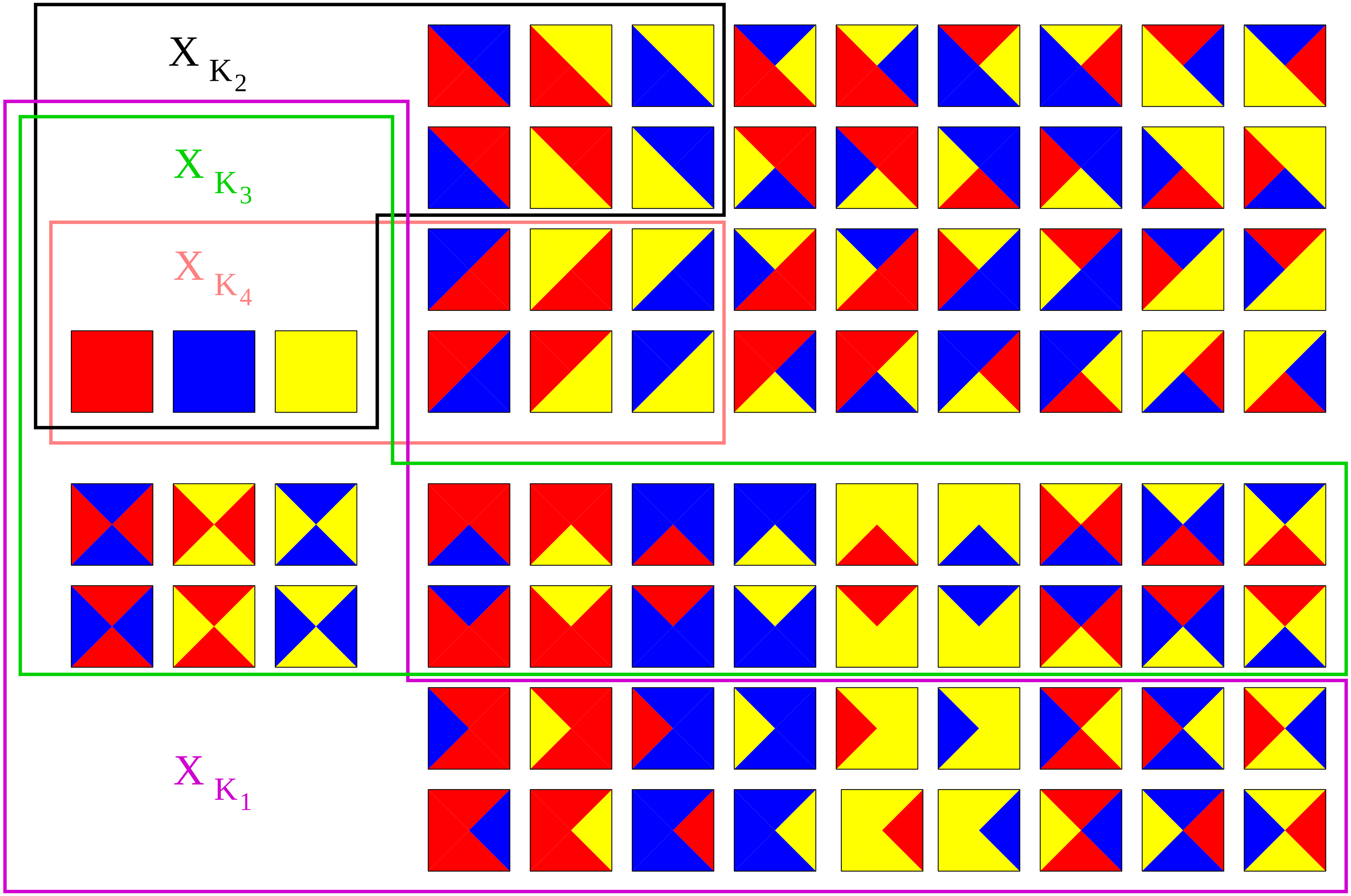
Quadrats de 3 colors – IV.

Elements invariants per R^j, $j = 0, 1, 2, 3$



Quadrats de 3 colors – V.

Elements invariants per K_j, $j = 1, 2, 3, 4$



Demostració Lema de Burnside – I.

Resultat previ, $|O_x||G_x| = |G|\ \forall x \in X$.

	$g_1\ \ldots$	g	$\ldots\ g_s$	$\sum_h$
y_1 $\vdots$				
y		1		$\lvert G_x\rvert$
$\vdots$ y_e				
$\sum_v$		1		

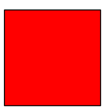
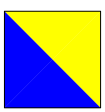
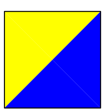
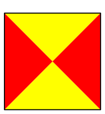
Marquem 1 quant $gx = y$; sino, 0.

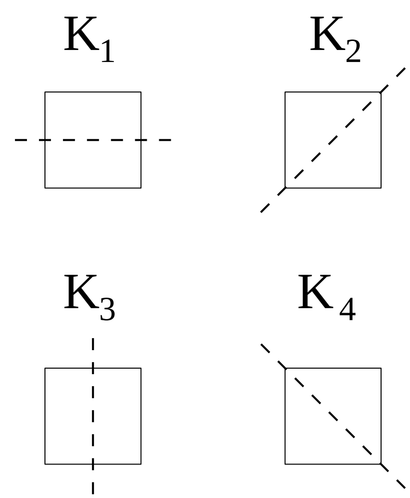
si $y \in O_x$; sino, 0. Suposem $y \in O_x$, llavors $y = hx = hG_x\, x$ i $|hG_x| = |G_x|$.

A cada columna hi ha exactament un 1.

$\sum\sum_v = s = |G|$, $\sum\sum_h = |O_x||G_x|$, i $\sum\sum_v = \sum\sum_h \Rightarrow |O_x||G_x| = |G|$.

Exemple:

	I	R	R^2	R^3	K_1	K_2	K_3	K_4	Σ_h
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x= 	1	0	0	0	0	1	0	0	2
	0	1	0	0	0	0	1	0	2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
....	....								....



Demostració Lema de Burnside – II.

Com abans,

	$g_1 \quad \dots$	g	$\dots \quad g_s$	$\sum_h$
y_1 $\vdots$				
y		1		$\lvert G_y \rvert$
$\vdots$ y_e				
$\sum_v$		$\lvert X_g \rvert$		

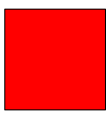
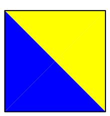
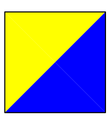
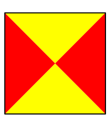
Marquem 1 quant $gy = y$; sino, 0.

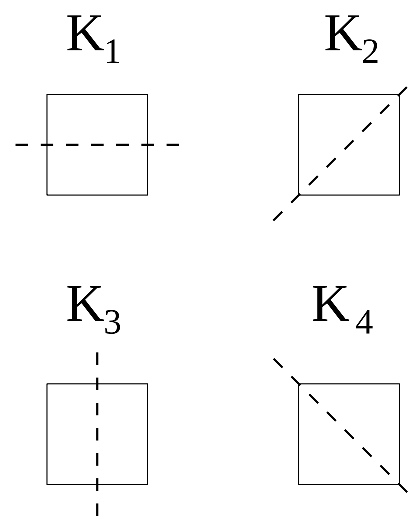
tots els g tals que $gy = y$, G_y.

tots els y tals que $gy = y$, X_g.

$$\sum \sum_v = \sum_g |X_g|, \ \sum \sum_h = \sum |G_y| = \sum_{O_x} \sum_{y \in O_x} |G|/|O_y| = |G| \sum_{O_x} 1 = |G| N$$

Exemple:

	I	R	R^2	R^3	K_1	K_2	K_3	K_4	Σ_h
	1	1	1	1	1	1	1	1	8
	1	0	0	0	0	1	0	0	2
	1	0	0	0	0	0	0	1	2
	1	0	1	0	1	0	1	0	4
....	....								....



Fórmules per poligons qualsevols.

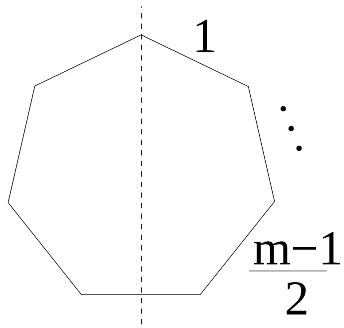
Fent servir el Lema de Burnside,

$$N_m(n) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n^{(k,m)}, \qquad N_m^*(n) = \frac{1}{2}N_m(n) + \frac{1}{4}\Big(n^{[\frac{m+1}{2}]} + n^{[\frac{m+2}{2}]}\Big)$$

on $[\,]$ indica part entera, i (k,m) és el màxim comú divisor.

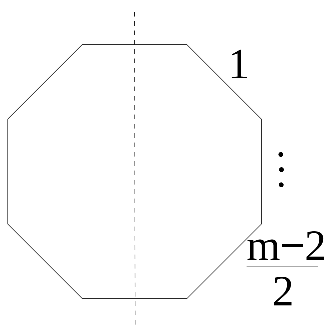
R^k permet posar (k,m) colors arbitraris, i la resta obligats.

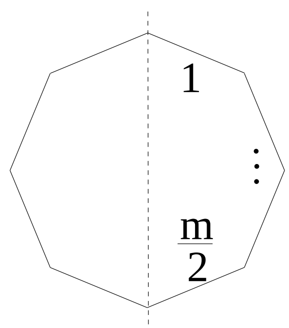
K_j, m imparell



$\frac{m-1}{2} + 1 = [\frac{m+1}{2}] = [\frac{m+2}{2}]$, m eixos.

K_j, m parell





I: $\frac{m-2}{2} + 2 = [\frac{m+2}{2}]$, $\frac{m}{2}$ eixos.

II: $\frac{m}{2} = [\frac{m+1}{2}]$, $\frac{m}{2}$ eixos.

Fórmules explícites.

Si p és primer (i més gran que 2),

$$N_p(n) = \frac{n}{p}\left(n^{p-1} + p - 1\right), \quad N_p^*(n) = \frac{n}{2p}\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + p - 1\right)$$

$N_m(n)$

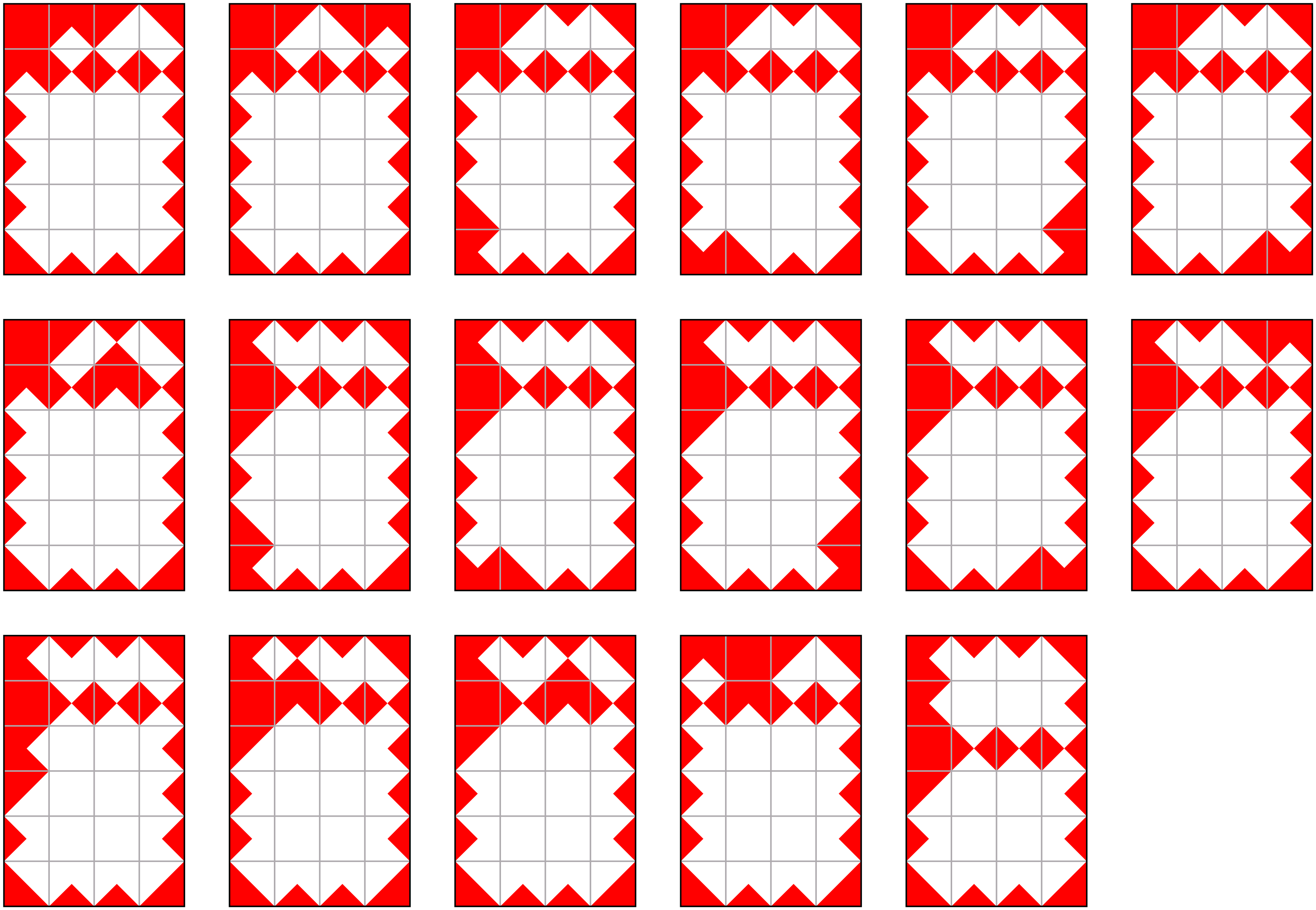
m\n	1	2	3	4	5	6
3	1	4	11	24	45	76
4	1	6	24	70	165	336
5	1	8	51	208	629	1560
6	1	14	130	700	2635	7826
8	1	36	834	8230	48915	210126
9	1	60	2195	29144	217045	1119796
10	1	108	5934	104968	976887	6047412
12	1	352	44368	1398500	20346485	181402676

$N_m^*(n)$

m\n	1	2	3	4	5	6
3	1	4	10	20	35	56
4	1	6	21	55	120	231
5	1	8	39	136	377	888
6	1	13	92	430	1505	4291
8	1	30	498	4435	25395	107331
9	1	46	1219	15084	110085	563786
10	1	78	3210	53764	493131	3037314
12	1	224	22913	704370	10196680	90782986

24 quadrats de 3 colors: vores del rectangle 6x4.

Hi ha 17 vores possibles, totes elles amb un pont color de la vora, que uneix els costats llargs.

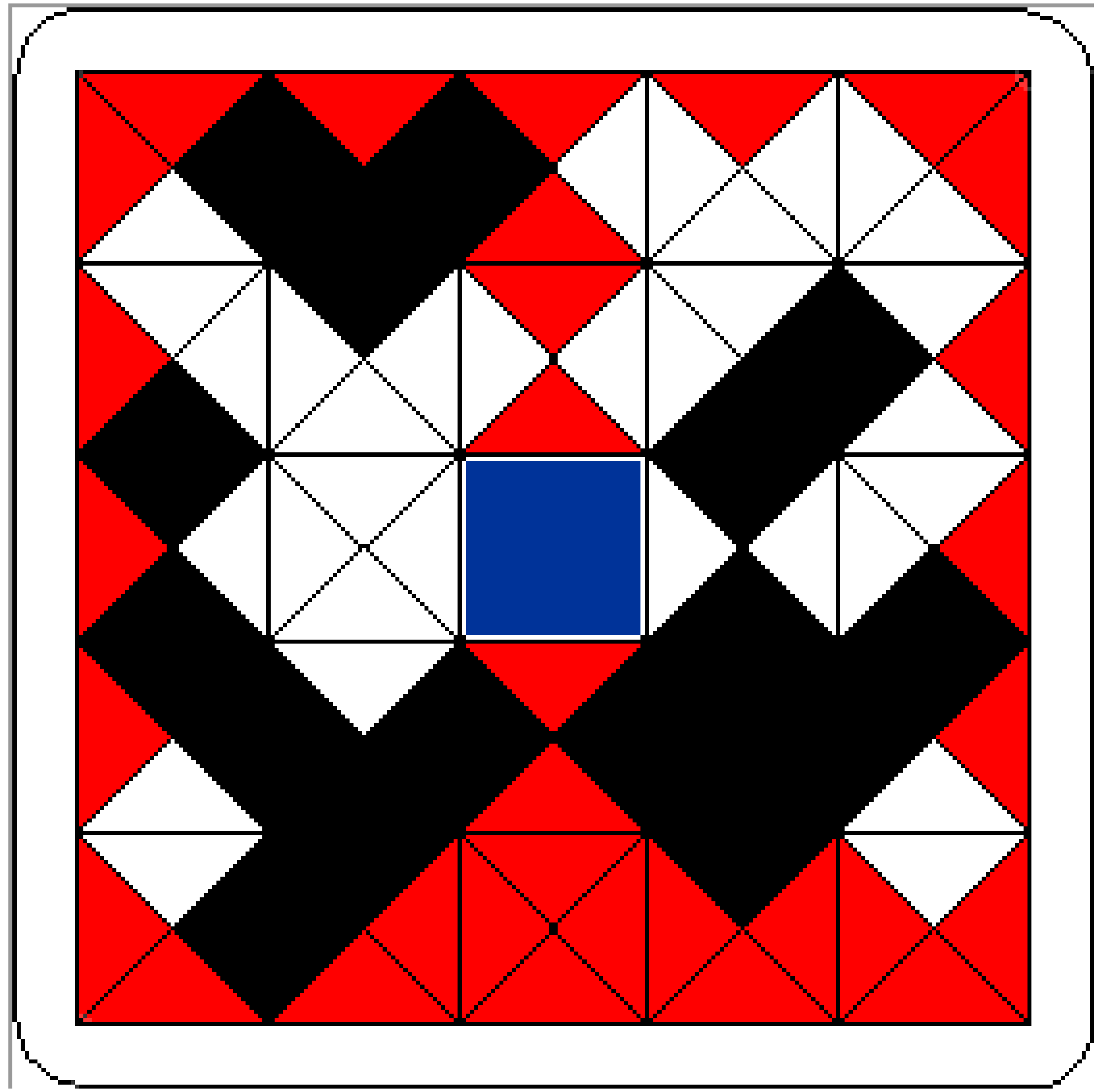


24 quadrats de 3 colors: el quadrat 5x5.

Amb els 24 quadrats de tres colors podem formar un quadrat 5x5 deixant un quadre buit al centre (o a qualsevol altre posició).

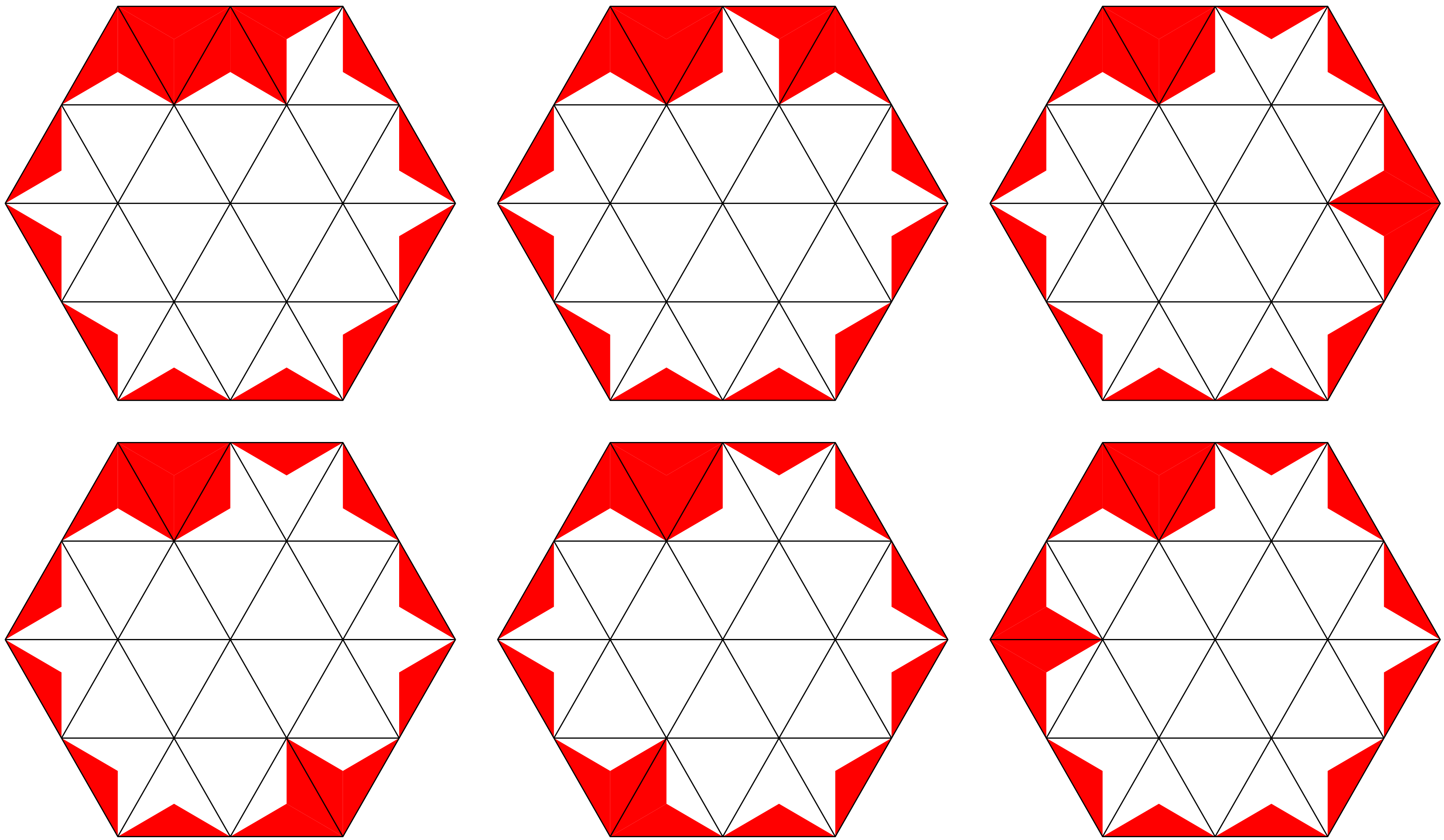
Una solució amb vora exterior monocolor és la figura adjunta.

La determinació de totes les vores possibles per les diferents posicions del quadrat buit és un problema obert.



24 triangles de 4 colors: vores de l'exagon.

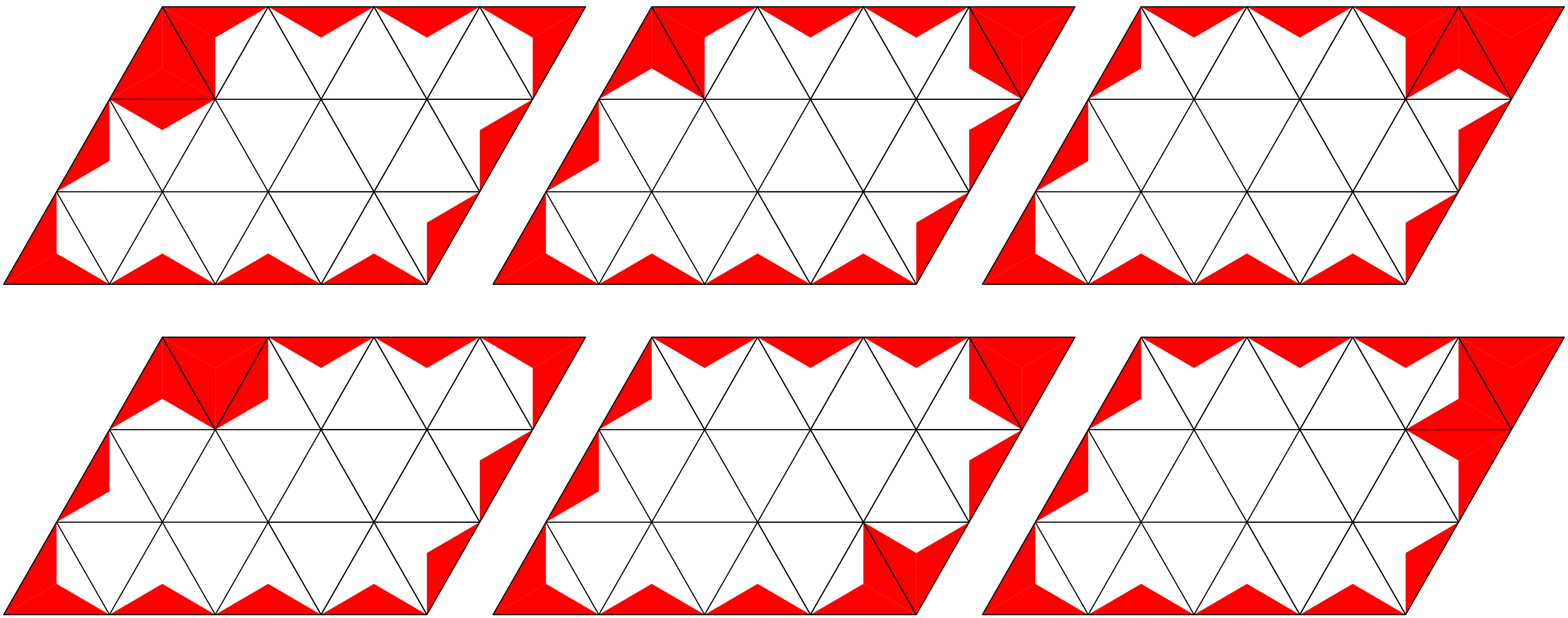
Hi ha 6 vores possibles, sense contar simetries.



24 triangles de 4 colors: vores del romboide 6x4.

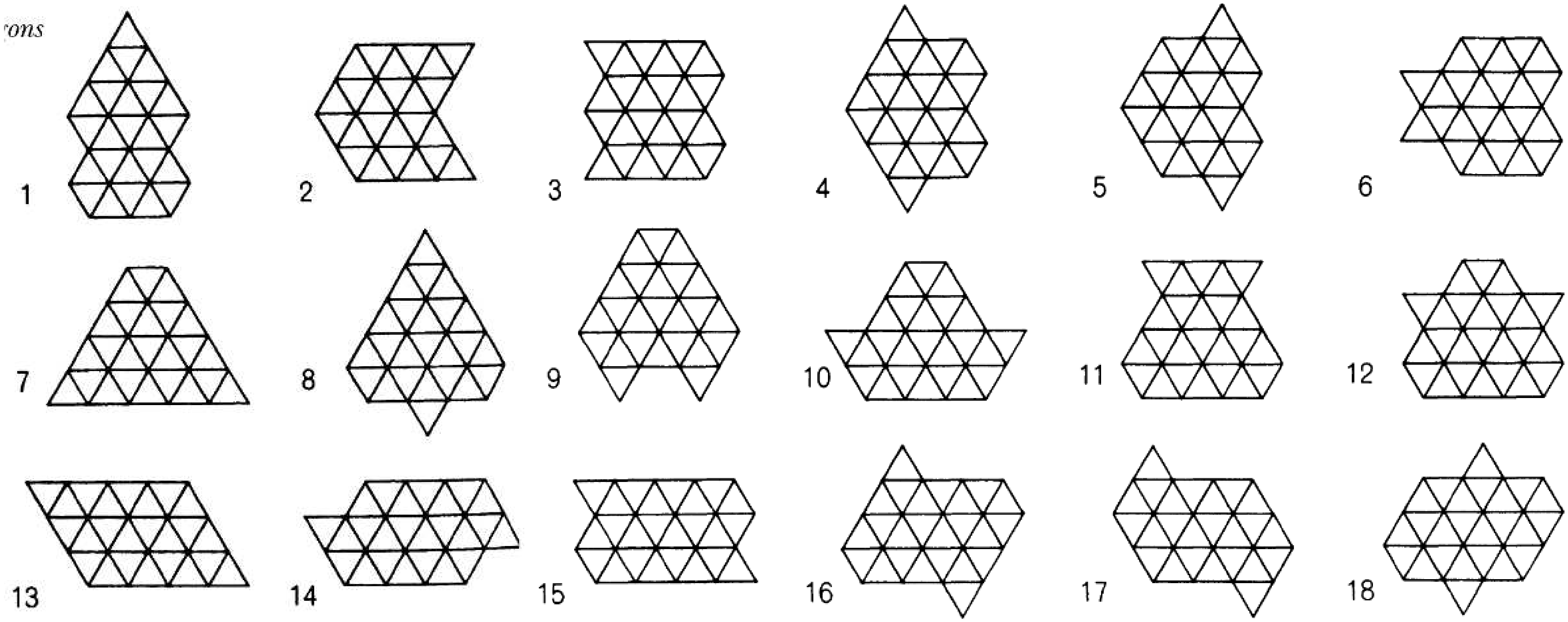
L'exagon té un perémetre de 12. Qualsevol altre figura formada amb els 24 triangles de quatre colors tindrà un perímetre parell i més gran. Amb un perímetre de 14 tenim el romboide de 6×4.

Hi ha 6 vores possibles, sense contar simetries.



Polígons de perímetre 14.

Hi ha exactament 18 polígons simètrics resolubles amb perímetre igual a 14 costats del triangle bàsic.



Cada polígon té un grup de simetria no trivial. Els grups de simetria son:

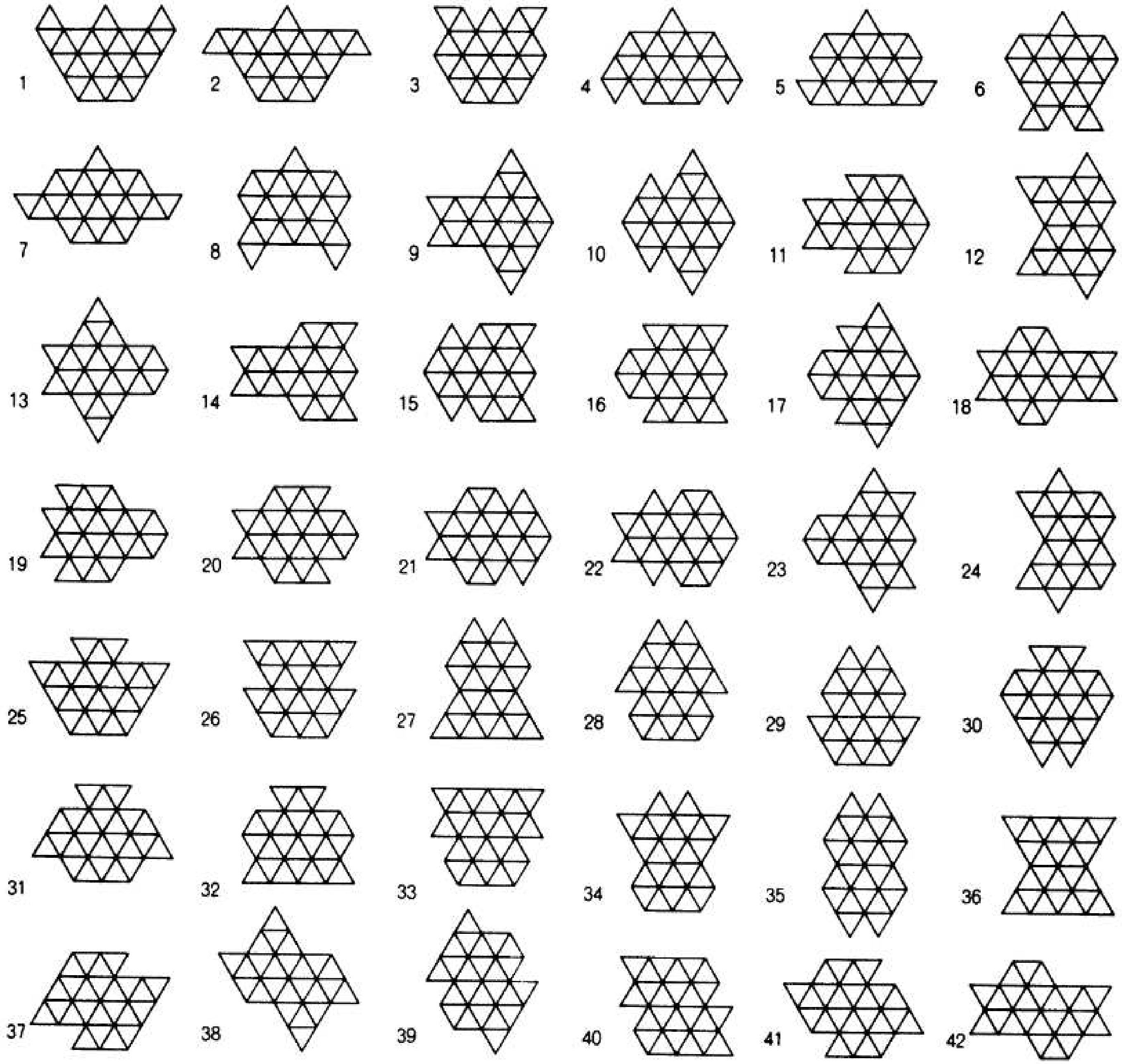
- D_1: 1 al 12 (una simetria de reflexió).
- C_2: 13 al 18 (una simetria de rotació de 180$^{\text{o}}$).

Polígons de perímetre 16.

Hi ha exactament 42 polígons simètrics resolubles de perímetre 16.

Els grups de simetria són:

- D_1: 1 al 34 (una simetria de reflexió).
- D_2: 35 i 36 (dues reflexions ortogonals i una rotació de 180º).
- C_2: 37 al 42 (una simetria de rotació de 180º).

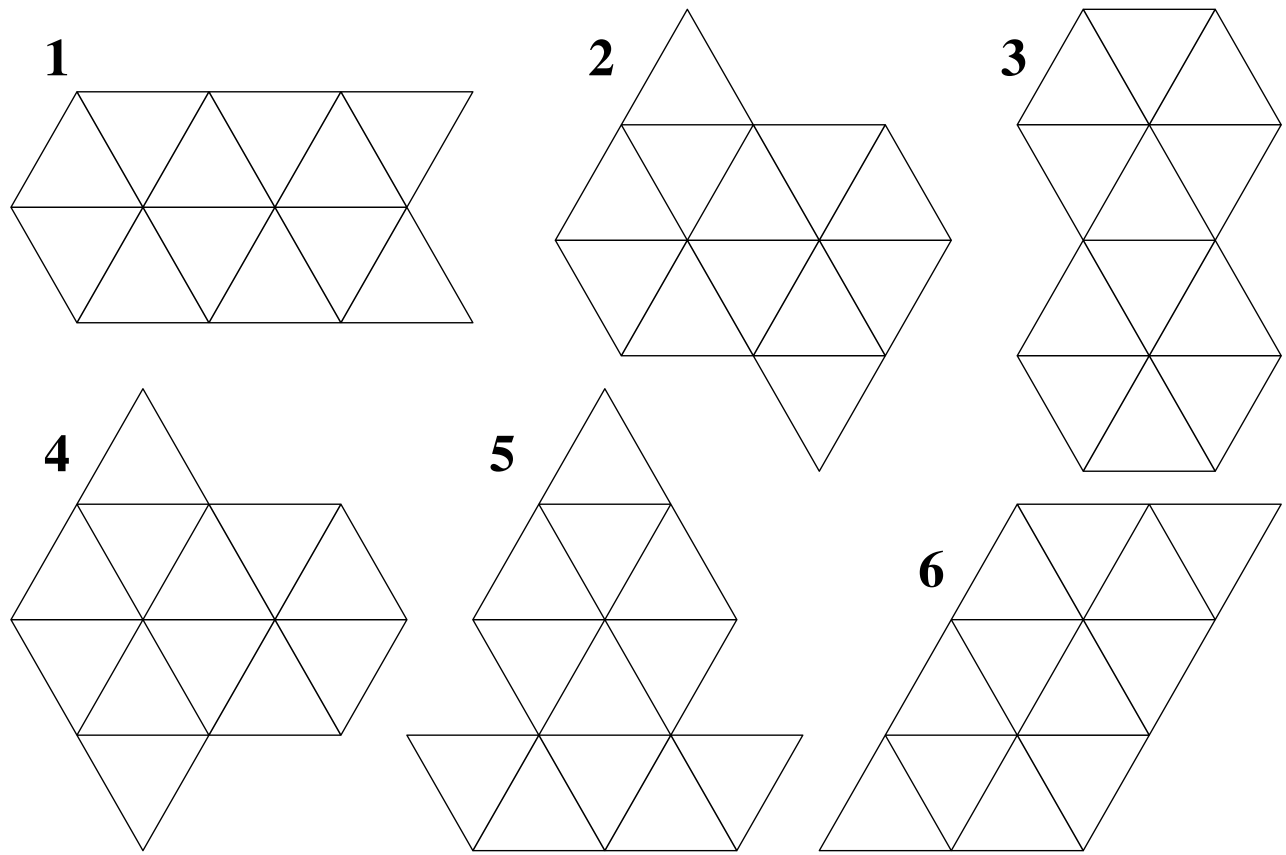


Problemes de duplicació.

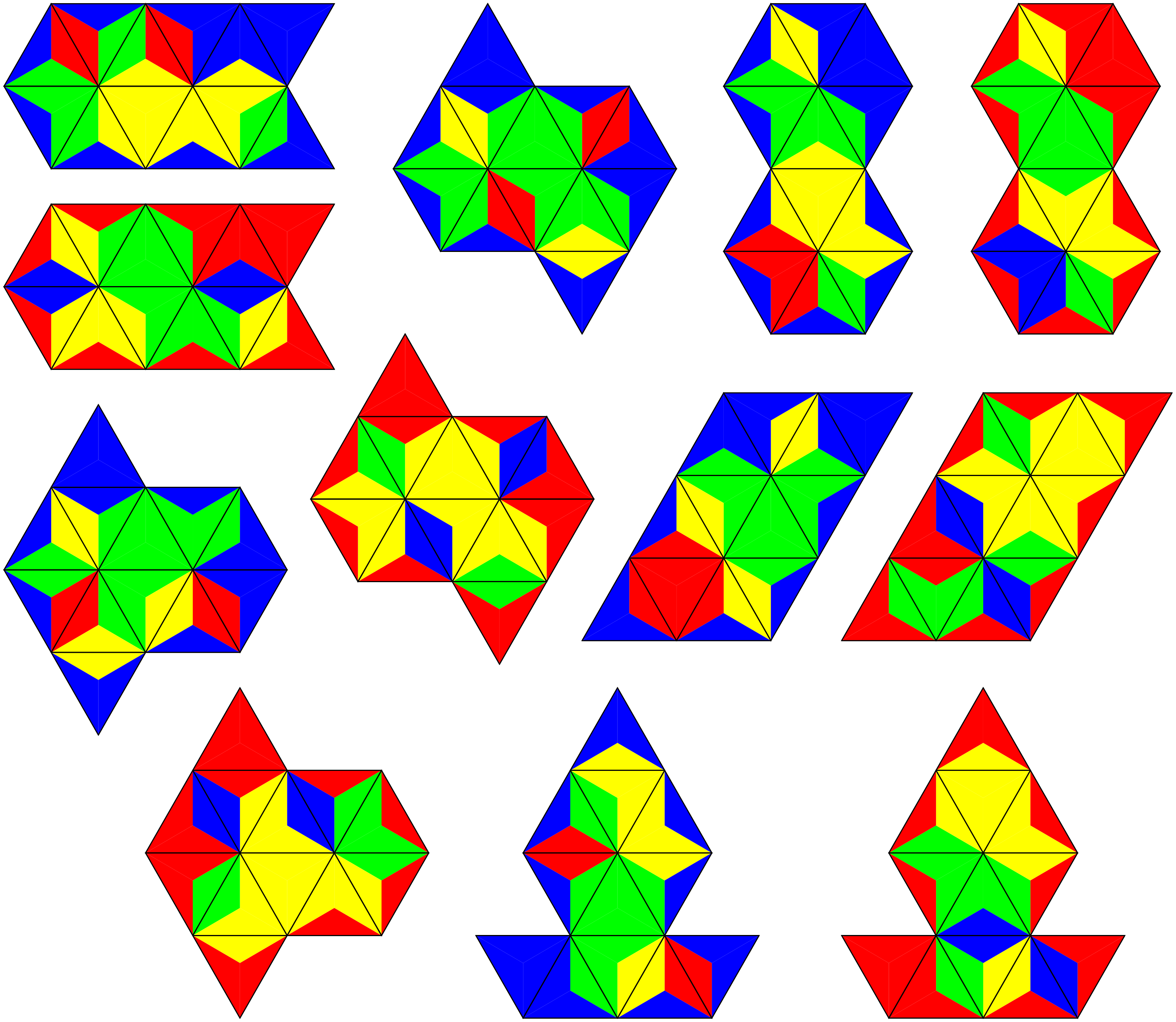
Hi ha molts polígons simètrics duplicables. Les dues còpies han de satisfer les regles de McMahon, pero amb vores de colors diferents per cada figura. En mostrem sis resolubles a continuació.

Els grups de simetria són:

- D_1: 1, 4 i 5 (una simetria de reflexió).
- D_2: 3 (dues reflexions ortogonals i una rotació de 180$^{\text{o}}$).
- C_2: 2 i 6 (una simetria de rotació de 180$^{\text{o}}$).



Problemes de duplicació: solucions.

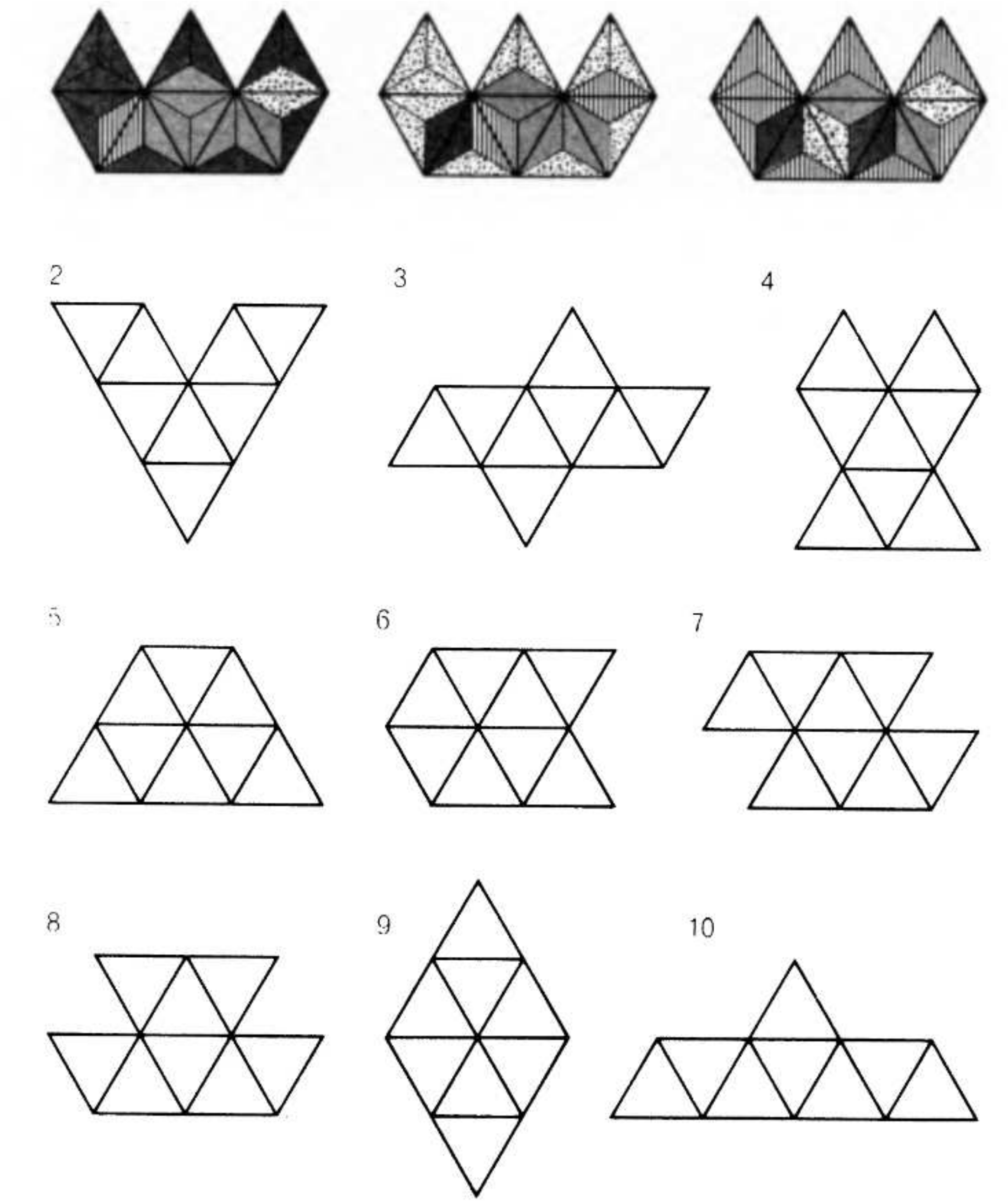


Problemes de triplicació.

Hi ha exactament 10 polígons simètrics triplicables, un d'ells resolt. Les tres còpies satisfan les regles de McMahon, pero amb vores de colors diferents per cada figura.

Els grups de simetria son:

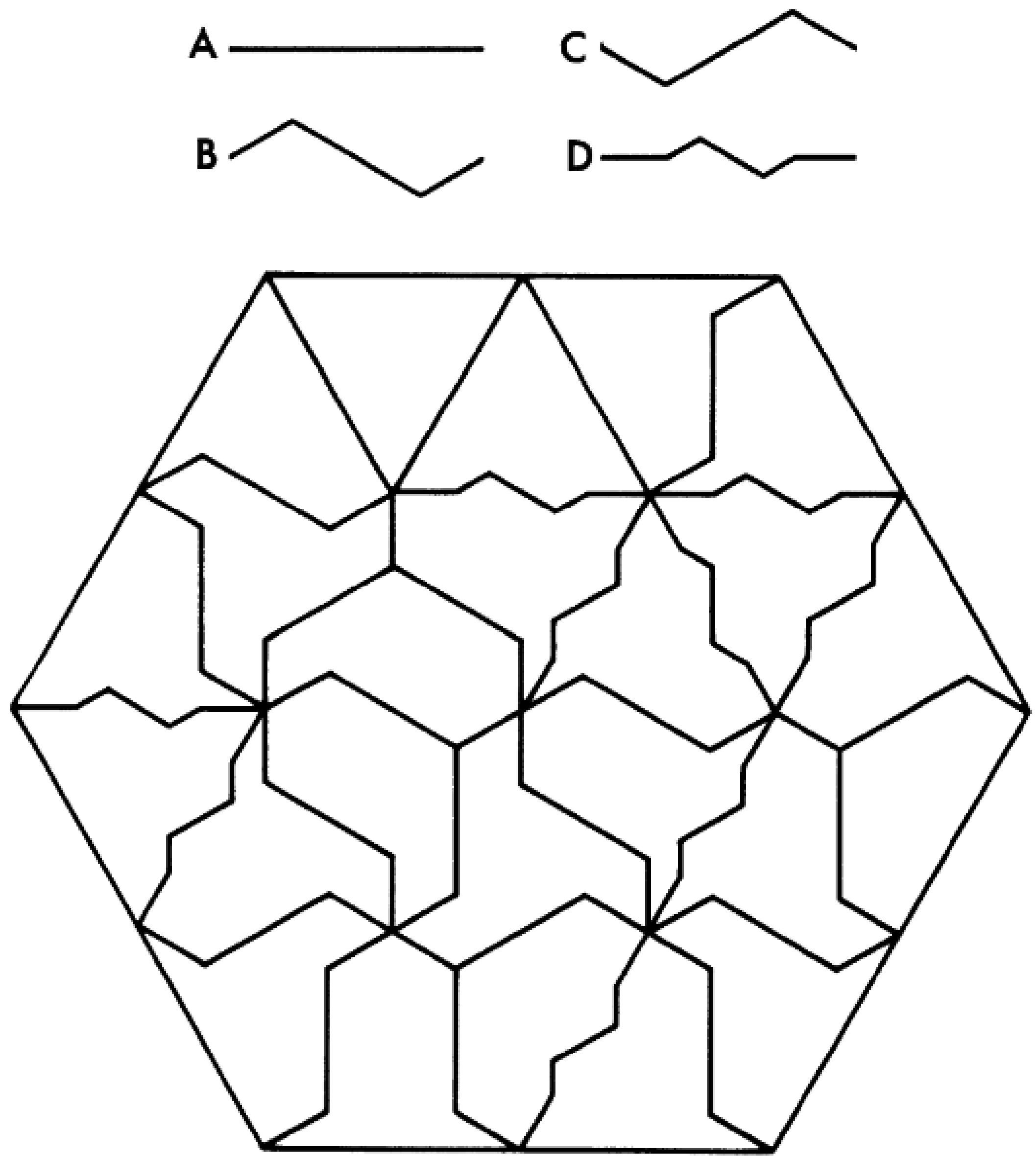
- D_1: 1, 2, 4, 5, 6, 8 i 10 (una simetria de reflexió).
- D_2: 9 (dues reflexions ortogonals i una rotació de 180$^{\text{o}}$).
- C_2: 3 i 7 (una simetria de rotació de 180$^{\text{o}}$).



Deformacions en lloc de colors.

Podem substituir els colors per una deformació dels costats dels triangles. Si les deformacions son diferents i simètriques (per rotació de 180$^{\mathrm{o}}$) respecte del centre del costat, cada deformació encaixarà sols amb ella mateixa.

Per tant les noves figures satisfan automàticament les regles de McMahon. Convé reservar el costat llis pel perímetre de la figura.



Variacions.

Podem colorejar els vèrtexos del poligon en lloc de les arestes. El nombre de coloracions i les simetries són les mateixes, ja que una deformació continua canvia els vèrtexos per arestes.

Pero ara les regles de McMahon canvien: ja no podem tenir el perímetre d'un sol color. Per tant el nombre de solucions és diferent. Veiem un exemple amb els triangles de colors: