La cuerda vibrante

- la cuerda es *extensible*
- inicialmente se encuentra sobre el eje de abscisas x
- la posición de un punto de la cuerda viene descrita por su posición vertical $y(x, t)$
- la posición depende de x y y (función de dos variables)

Tensión de la cuerda: $T = T(x, t)$

Consideremos un elemento de cuerda de longitud Δx suficientemente pequeño en un *cierto cierto instante* t.

Aplicamos la segunda ley de Newton sobre el elemento (m es la *masa* del elemento)

$$ma_x = T(x + \Delta x) \cos\theta(x + \Delta x) - T(x) \cos\theta(x) \tag{1}$$

$$ma_y = T(x + \Delta x) \sin\theta(x + \Delta x) - T(x) \sin\theta(x) \tag{2}$$

Hipótesis (1): amplitudes $y(x, t)$ *pequeñas*:

$$\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta, \quad \cos\theta \sim 1$$

Hipótesis (2): solo movimiento *vertical*:

$$a_x = 0$$

De esta forma, (1) y (2) quedan

$$0 = T(x+\Delta x)\cdot 1 - T(x)\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad T(x+\Delta x) = T(x) = T = const. \tag{3}$$

$$ma_y = T(x+\Delta x)\tan\theta(x+\Delta x) - T(x)\tan\theta(x) \tag{4}$$

Aceleración vertical: $a_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

La ecuación (4) la reescribimos como:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\{\tan\theta(x+\Delta x) - \tan\theta(x)\} \tag{5}$$

La tangente es la derivada en x: $\tan\theta(x) = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

Si ρ es la *densidad lineal* de la cuerda: $m = \rho\Delta x$, entonces:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\,\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} \sim \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\Delta x \to 0) \tag{6}$$

Y así llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{7}$$

Si definimos $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, la ecuación queda como:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \tag{8}$$

Ecuación de Ondas

Ejercicio: demostrar que c tiene dimensiones de *velocidad*

Análisis de la ecuación de ondas: soluciones

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \tag{9}$$

Cualquier función de la forma $f(x,t) = f(x-ct)$ es solución de (9):

Comprobación:

$$\partial_x f = f'\ ,\quad \partial^2_{xx} f = f''$$
$$\partial_t f = f'\,(-c),\quad \partial^2_{tt} f = f''(-c)^2 = c^2 f'' = c^2 \partial^2_{xx} f$$

Ejemplos: $f = (x-ct)^2$, $f = \mathrm{e}^{x-ct}$, ...

- La función $f(x-ct)$ es un perfil de x para cada instante de tiempo t.
- El perfil se desplaza a velocidad c (hacia la dcha./izda. si $c > 0/c < 0$)
  Ejemplo:

$$f(x,t) = (x-2t)^2$$

- $g(x,t) = g(x+ct)$ es tambien solución (se propaga hacia la iz. si $c > 0$)
- Si $f_1(x,t)$ y $f_2(x,t)$ son soluciones, cualquier combinación lineal de la forma $f = Af_1 + Bf_2$ tambien es solución (Principio de Superposición)
- Solución general de la E.O.: $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

Análisis de la ecuación de ondas: soluciones armónicas

Son de la forma:

$$u(x,t) = u_0 \cos\{k(x \pm ct) + \phi\}$$

- Son solución $\forall k$ y ϕ
- Son ondas *periódicas* en espacio:

$$u(x+\frac{2\pi}{k},t) = u_0 \cos\{k(x+\frac{2\pi}{k} \pm ct)\} = u_0 \cos\{k(x \pm ct)+2\pi\} = u(x,t)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \text{(Longitud de onda)}$$

- Son ondas *periódicas* en tiempo:

$$u(x,t+\frac{2\pi}{kc}) = u_0 \cos\{k(x \pm c(t+\frac{2\pi}{kc})\} = u_0 \cos\{k(x \pm ct)+2\pi\} = u(x,t)$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{kc}, \quad \text{(Período de la onda)}$$

- $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$ (Frecuencia de la onda)
- $\dfrac{\lambda}{\mathrm{T}} = \dfrac{\omega}{k} = c$

Forma exponencial compleja

$$\boxed{u(x,t) = \Re\{u_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx \pm \omega t)}\}} \tag{10}$$

Por lo general trabajaremos con la forma compleja (siempre recordando que es una cantidad física real):

$$u(x,t) = A \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx \pm \omega t)}$$

Cuerda vibrante: ondas estacionarias (1)

- La cuerda se encuentra fija por los extremos $x = 0$ y $x = l$
- Condiciones de contorno:

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad \forall t$$

- Perfiles de la forma $f(x - ct)$ o $g(x + ct)$ no pueden ser solución, dado que dichos perfiles deben anularse en los extremos, i.e., $f = g = 0$.
- Probaremos con funciones armónicas de la forma:

$$\boxed{y(x,t) = A\ \cos(kx - \omega t + \phi) + B\ \cos(kx + \omega t)} \qquad (11)$$

- Imponemos una de las condiciones de contorno $y(0,t) = 0,\ \forall t$:

$$y(0,t) = A\ \cos(-\omega t + \phi) + B\ \cos \omega t =$$
$$= A\ \cos \omega t \cos \phi + A\ \sin \phi \sin \omega t + B\ \cos \omega t =$$
$$= (A\ \cos \phi + B) \cos \omega t + A\ \sin \phi \sin \omega t = 0,\ \forall t$$

- La última ecuación es una igualdad *funcional*, no algebraica, y debe cumplirse en cualquier instante de tiempo ($\forall t$).
- En particular, para $t = 0$ y para $t = \pi/2\omega$:

$$t = 0: \quad A\ \cos \phi + B = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2\omega}: \quad A\ \sin \phi = 0$$

- De la segunda ecuación, tenemos dos opciones:

$$A = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow \text{sol. trivial}, \quad \text{o} \quad \phi = 0, \rightarrow B = -A$$

Cuerda vibrante: ondas estacionarias (2)

- Finalmente tenemos

$$y(x,t) = A\,\{\cos(kx-\omega t) - \cos(kx+\omega t)\} = 2A\ \sin kx\ \sin\omega t \qquad (12)$$

- Ahora imponemos la segunda condición de contorno ($y(l,t)=0, \forall t$):

$$y(l,t) = 2A\ \sin kl\ \sin\omega t = 0,\ \forall t$$

- De nuevo, esta ecuación debe cumplirse *para todo* t:

$$\sin kl = 0 \longrightarrow kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- Modos normales: $k_n = \dfrac{n\pi}{l}$
- Longitudes de onda permitidas: $\lambda_n = \dfrac{2l}{n}$
- Frecuencias permitidas: $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$
- Frecuencia fundamental: $\omega_0 = \dfrac{\pi c}{l} = \dfrac{\pi}{l}\sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\rho}}$, es decir:

$$\omega_n = n\omega_0 \qquad (13)$$

- Si T $\uparrow$, entonces $\omega_0 \uparrow$
- Si $\rho \downarrow$, entonces $\omega_0 \uparrow$
- Si $l \downarrow$, entonces $\omega_0 \uparrow$
- Modos normales:

$$\boxed{y_n(x,t) = A\ \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)} \qquad (14)$$

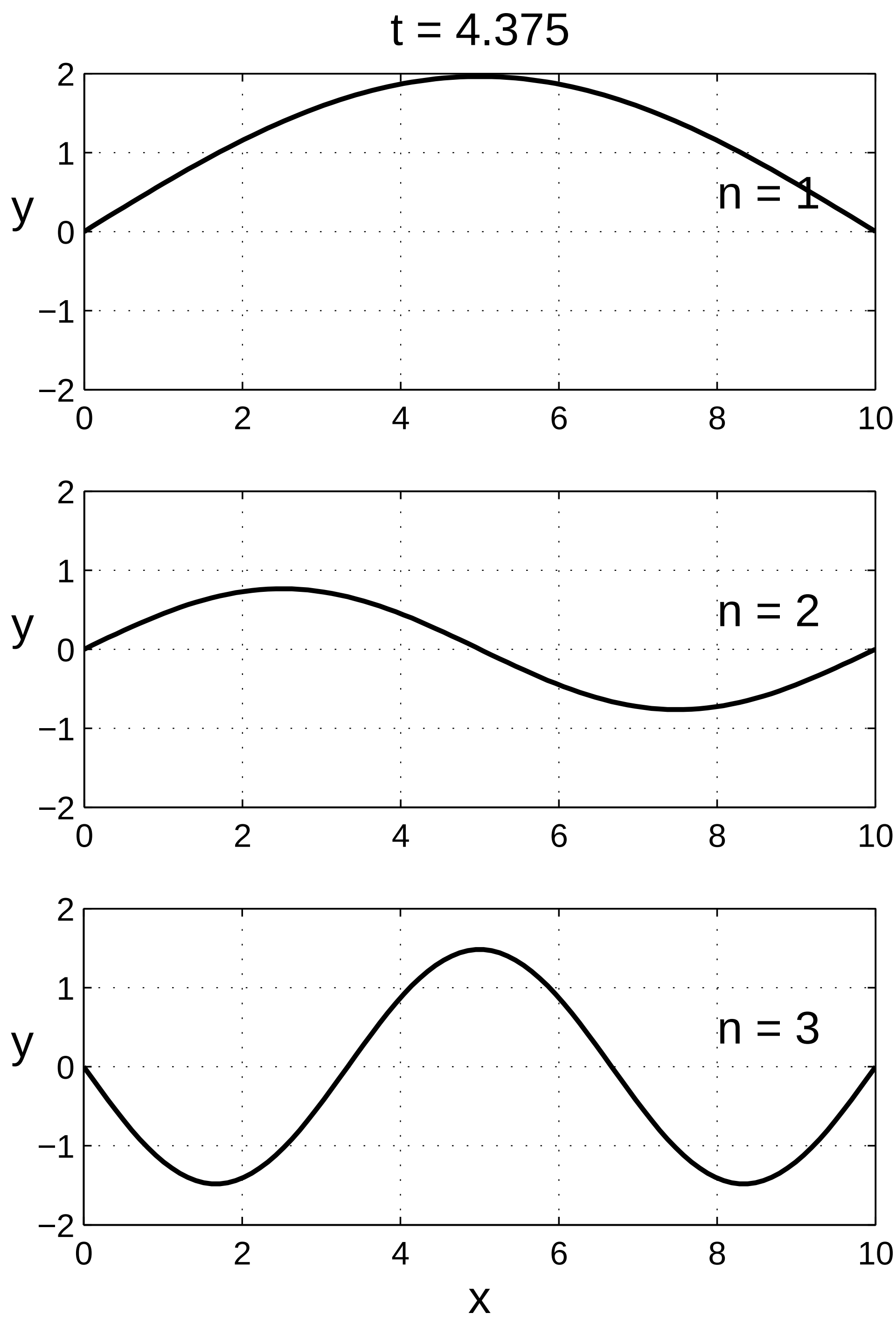
Cuerda vibrante: ondas estacionarias (3)

$$\boxed{y_n(x,t) = A\ \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)} \tag{15}$$

Ejemplo

$$A = 2.0, \quad l = 10.0, \quad T = 1.0, \quad \rho = 1.0$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{l}\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{10} \sim 0.3142, \quad \mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 20.0 \text{ (período fundamental)}$$



Energía y Potencia transmitidas por las ondas (1)

Calculemos la densidad de energía cinética y potencial por unidad de longitud en la cuerda vibrante:

- Cinética

$$\eta_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x} v_{\text{transversal}}^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{16}$$

- Potencial

  La tensión de la cuerda se debe a su elasticidad, por lo tanto debemos esperar que dicha tensión derive de un cierto potencial (Ley de Hooke).

  La energía potencial es el *trabajo* W que realiza la tensión al estirar la cuerda. Tomaremos como origen de potenciales la situación en la que la cuerda se encuentra horizontal:

$$\eta_{\text{pot}} = \frac{W}{\Delta x} = \frac{T(\Delta s - \Delta x)}{\Delta x} = T(\frac{\Delta s}{\Delta x} - 1)$$

Longitud de arco Δs:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\eta_{\text{pot}} = T\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} - 1\right)$$

Aproximamos para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pequeño (amplitudes bajas):

Infinitésimos equivalentes: $\sqrt{1+a} - 1 \sim \frac{a}{2}$

Energía y Potencia transmitidas por las ondas (2)

$$\eta_{\text{pot}} = T\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \sim \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Densidad de energía mecánica η

$$\boxed{\eta = \eta_{\text{cin}} + \eta_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \tag{17}$$

Lo podemos expresar en función de ρ y c ($T = \rho c^2$):

$$\boxed{\eta = \rho c\left\{\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}} \tag{18}$$

Impedancia

Es el cociente entre la fuerza y la velocidad verticales:

$$\mathrm{Z} = \frac{F_{\text{vert}}}{v_{\text{vert}}} = \frac{T\partial_x y}{\partial_t y}$$

Para una onda armónica la impedancia es

$$\mathrm{Z} = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T}{c} = \rho c$$

$$\boxed{\eta = \mathrm{Z}\left\{\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}} \tag{19}$$

Potencia transmitida a lo largo de la cuerda

Tenemos que evaluar la variación instantánea de densidad de energía en función del tiempo:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathrm{Z}\left\{\frac{1}{c}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right\} = \mathrm{Z}\left\{\frac{1}{c}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right\} =$$

$$= c\mathrm{Z}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{c\mathrm{Z}\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right\}$$

Energía y Potencia transmitidas por las ondas (3)

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{ cZ\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right\} = 0$$

Potencia

$$\boxed{\mathrm{P} = -\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{ cZ\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right\}} \tag{20}$$

Esto nos permite escribir una *ecuación de conservación* para la densidad de energía:

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = 0} \tag{21}$$

Veamos el *significado físico* de P:

Calculemos la variación neta de energía mecánica acumulada en un tramo de cuerda entre dos posiciones x_1 y x_2:

La energía mecánica en ese tramo es: $\mathrm{E} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \eta \, \mathrm{d}x$

La variación instantánea de energía viene dada por la derivada temporal:

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \eta \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \eta}{\partial t}\, \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{P}(x_1) - \mathrm{P}(x_2)$$

Si hacemos un balance de energía entre t y $t + \Delta t$ vemos que:

$$\frac{\mathrm{E}(t+\Delta t) - \mathrm{E}(t)}{\Delta t} = \mathrm{P}(x_1) - \mathrm{P}(x_2), \quad \text{es decir}$$

$$\mathrm{E}(t+\Delta t) = \mathrm{E}(t) + \Delta t \mathrm{P}(x_1) - \Delta t \mathrm{P}(x_2)$$

La energía final, transcurrido un tiempo Δt, es la energía inicial + la que entra por x_1 − la que sale por x_2.

$\mathrm{P}(x)$ es la energía, por unidad de tiempo, que fluye por el punto x, de izda. a dcha., es decir, la potencia transmitida en la dirección $+x$.

Energía y Potencia transmitidas por las ondas (4)

Las expresiones anteriores las hemos obtenido partiendo de la ecuación de ondas, por lo tanto son **generales** para cualquier onda, y no solamente válidas para la cuerda vibrante. En resumen:

Densidad de energía mecánica de una onda

$$\boxed{\eta = \mathrm{Z}\left\{\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{c}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}} \tag{22}$$

Potencia transmitida en la dirección $+x$

$$\boxed{\mathrm{P} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{c\mathrm{Z}\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right\}} \tag{23}$$

Ecuación de conservación de la energía mecánica

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = 0} \tag{24}$$

Energía y Potencia en ondas armónicas (1)

Consideramos ondas de la forma $u(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$

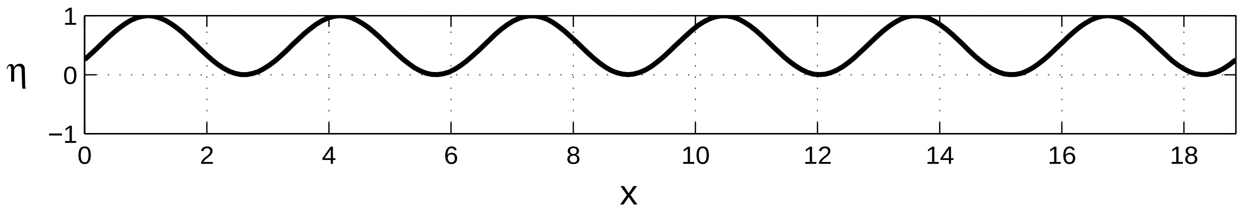
$$\eta_{\rm cin} = \frac{\rm Z}{2c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rm Z}{2c}\ A^2\omega^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)$$

$$\eta_{\rm pot} = \frac{{\rm Z}c}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{{\rm Z}c}{2}\ A^2k^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)$$

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \eta_{\rm pot} = \frac{\rm Z}{2c}\ A^2w^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)$$

$$\eta_{\rm cin} = \eta_{\rm pot} \qquad \text{!! ¿? !!}$$

$$\boxed{\eta = \eta_{\rm cin} + \eta_{\rm pot} = \frac{\rm Z}{c}\ A^2w^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)} \tag{25}$$



$${\rm P} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{c{\rm Z}\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right\} = -c{\rm Z}\{\omega A\sin(kx - \omega t + \phi)\}\{-kA\sin(kx - \omega t + \phi)\} =$$

$$= {\rm Z}A^2\omega^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)$$

Es siempre positiva, dado que la onda se propaga hacia la derecha.

Ejercicio (1): comprobar que $\partial_t\eta = -\partial_x P$

Ejercicio (2): calcular $\eta_{\rm cin}$, $\eta_{\rm pot}$, η y P para una onda viajando en sentido opuesto:

$$u = A\ \cos(kx + \omega t + \phi)$$

Energía y Potencia en ondas armónicas (2)

Promedios temporales de potencia y energía

Definimos el *promedio temporal* de una magnitud $S(t)$ periódica en el tiempo con período T, es decir:

$$S(t+\mathrm{T}) = S(t), \quad \forall t, \quad \text{como:}$$

$$\boxed{\bar{S} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} S(t)\,\mathrm{d}t} \tag{26}$$

Entonces:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\mathrm{Z}A^2\omega^2}{c}\sin^2(kx-\omega t+\phi)\mathrm{d}t = \frac{1}{2c}\mathrm{Z}A^2\omega^2$$

$$\bar{\mathrm{P}} = \pm\frac{1}{2}\mathrm{Z}A^2\omega^2$$

Ejercicio: demostrarlo (Ayuda: $\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \dfrac{x - \sin x\ \cos x}{2}$)

Los promedios temporales $\bar{\eta}$ y $\bar{\mathrm{P}}$ son proporcionales a A^2